Faculté de Droit, Sciences économiques & de gestion
Le Mans Université

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2025-2026
ANNEE D'ETUDES : L2 Eco-Gestion
SEMESTRE : 3
MATIERE : Statistiques et Probabilités
ENSEIGNANT : F. Karamé
VERSION : 24/11/2025

Révisions

EXERCICE 1
Soit X suit une variable aléatoire discrète de loi de probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ définie pour $x \in \mathcal{X}$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \ \forall k \in [1, \ldots, n]$$
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \ \forall k \in [0, \ldots, \infty[, \lambda > 0$$

1. Montrez qu'on est bien en présence d'une loi de probabilités.
2. Calculez l'espérance des lois.
3. Calculez la variance des lois.

EXERCICE 2
Soit un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k soit proportionnelle à k. Soit X la variable aléatoire discrète associée.

1. Déterminer la loi de probabilités de X.
2. Calculez son espérance.
3. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et son espérance.

EXERCICE 3
Soit la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} kx^{-\alpha} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $x \geq \theta > 0$.

1. Supposons $\alpha - 1 > 0$. Montrer que $k = (\alpha - 1)\theta^{\alpha-1}$ pour que $f(.)$ soit bien une densité de probabilités (la loi de Pareto).
2. Calculer la fonction de répartition.
3. Supposons $\alpha - 2 > 0$. Montrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 2}\theta$.
4. Supposons $\alpha - 3 > 0$. Montrer que $\mathbb{E}(X^2) = \frac{\alpha - 1}{\alpha - 3}\theta^2$. En déduire $\mathbb{V}(X)$.

EXERCICE 4
Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \forall x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \forall x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. $f(.)$ est-elle une densité de probabilités ?
2. Déterminer sa fonction de répartition.
3. Calculer son espérance et sa variance.

Couples de VAD

EXERCICE 5

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définie pour un ensemble de définition $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Soit la loi de probabilités jointe $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$:

		y			
		1	2	3	4
	-2	0.1	0.3	0.1	0
x	0	0.1	0	0.1	0.1
	2	0	0.1	c	0.1

1. Déterminer la valeur de c pour être en présence d'une loi de probabilités.
2. Définir l'espérance et la variance.
3. Définir les lois marginales de X et Y, leur espérance et leur variance.
4. Caractériser la loi de probabilités de $X + Y$.
5. Caractériser la loi de probabilités conditionnelle $Y|X = 0$.
6. Caractériser la loi de probabilités conditionnelle $X|Y = 1$.

EXERCICE 6

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de loi de probabilités jointe $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ avec $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. On définit l'opérateur Covariance comme : $\mathbb{C}ov(X, Y) = \mathbb{E}\{[X - \mathbb{E}(X)][Y - \mathbb{E}(Y)]\} = \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{y \in \mathcal{Y}} [x - \mathbb{E}(X)][y - \mathbb{E}(Y)]\mathbb{P}(X = x, Y = y)$.

1. Montrez que $\mathbb{C}ov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
2. Que vaut $\mathbb{C}ov(X, X)$?
3. Que vaut $\mathbb{C}ov(aX, bY)$?
4. Que vaut $\mathbb{C}ov(X, Y)$ si les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes en probabilités ?
5. Toujours dans ce cas, calculer $\mathbb{V}(X + Y)$.

EXERCICE 7

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes défini pour un ensemble de définition $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$. La loi de probabilités jointe est la suivante :

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{7}\left(1 - \frac{ij}{30}\right)$$

1. Vérifier qu'on est en présence d'une loi de probabilités.
2. Définir les lois marginales de X et Y, leur espérance et leur variance.
3. Caractériser la loi de probabilités conditionnelle $Y|X = 2$.
4. Caractériser la loi de probabilités conditionnelle $X|Y = 1$.

EXERCICE 8

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes tel que X suit une Bernoulli de paramètre 0.6 et $\mathcal{Y} = \{0, 1, 2\}$. Les lois de probabilités **conditionnelles** de Y sachant X sont fournies par le tableau suivant :

		y		
		0	1	2
x	0	0.5	0.2	0.3
	1	0.3	0.4	0.3

1. Ces variables sont-elles indépendantes ? Donnez la loi jointe du couple.
2. Définir la loi marginale de Y et son espérance.
3. Caractériser la loi de probabilités de $Z = X + Y$ et sa variance.
4. En déduire $\mathbb{C}ov(X, Y)$.

EXERCICE 9
Soit a un réel et (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\mathbb{P}(X = k, Y = j) = \frac{a}{2^{k+1} j!}$$

1. Déterminer a.
2. Définir les lois marginales de X et Y.
3. Calculer leur covariance.

Couples de VAC

EXERCICE 10
La durée de vie de deux puces est un couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité de probabilités jointe

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y} & x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Comment sait-on qu'on est en présence d'une loi de probabilités ?
2. Définir l'espérance et la variance.
3. Définir les lois marginales de X et Y, leur espérance et leur variance.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X > Y)$.

EXERCICE 11
Soient les fonctions

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+y+1)^2} & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Est-on en présence de densités de probabilités ?

EXERCICE 12
Soit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} k(y^2 - x^2 + 1) & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour quelle valeur de k est-on en présence d'une densité de probabilités ?

EXERCICE 13
Soit un couple de variables aléatoires continues (X, Y) de densité de probabilités jointe

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Les variables sont-elles indépendantes ?
2. Définir la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$.
3. Calculer son espérance.

EXERCICE 14
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues de densité de probabilités jointe

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & \forall (x,y) \in [0,4] \times [1,5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Comment sait-on qu'on est en présence d'une loi de probabilités ?
2. Définir l'espérance et la variance.
3. Définir les lois marginales de X et Y, leur espérance et leur variance.
4. Définir les fonctions de répartition jointe et marginales.
5. Définir la covariance.
6. Que devient-elle si les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes en probabilités ?
7. Même question pour la fonction de répartition jointe.

EXERCICE 15
Soit (X, Y) un couple de lois normales de densité de probabilités jointe

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

1. Donner les lois marginales, leurs espérances et variances.
2. Donner les lois conditionnelles.
3. Sont-elles indépendantes ?

Estimateurs

EXERCICE 16
Soit une suite de n variables aléatoires identiquement et indépendamment distribuées $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
1. Montrez que $\mathbb{P}\{(X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)\} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$.
2. Quelle transformation opérer pour utiliser les propriétés des sommes ?
3. Application : à la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
4. Estimez le paramètre λ de la loi de Poisson en montrant que la solution du programme du maximum de vraisemblance : $\widehat{\lambda} = \arg\max\limits_{\lambda} \left\{ \ln \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \right\}$ est $\widehat{\lambda} = \overline{x}$.
5. Montrez qu'on est bien à un maximum.
6. Reprendre les questions précédentes pour une loi de Bernoulli de paramètre p.

EXERCICE 17
Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une suite de n variables aléatoires continues identiquement et indépendamment distribuées selon la densité de probabilités

$$f(x_i;\theta) = \begin{cases} \dfrac{x_i^{\frac{1}{\theta}-1}}{\theta c^{\frac{1}{\theta}}} & \text{si } x_i \in [0, c] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec c une constante connue. On veut estimer le paramètre θ par maximum de vraisemblance : $\widehat{\theta} = \arg\max\limits_{\theta} \mathcal{L}(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln[f(x_i;\theta)]$.
1. Calculer $\ln[f(x_i;\theta)]$.
2. En déduire l'expression du critère à maximiser $\mathcal{L}(\theta)$.
3. Résoudre la condition du premier ordre : $\dfrac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta}|_{\theta=\widehat{\theta}} = 0$ et montrer que $\widehat{\theta} = \ln(c) - \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$.
4. Calculer $\dfrac{\partial^2 \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta^2}|_{\theta=\widehat{\theta}}$ et montrer qu'on est bien à un maximum.

EXERCICE 18
Soit une suite de n variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ identiquement et indépendamment distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de densité de probabilités $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. On veut estimer les paramètres m et σ^2 en résolvant le programme du maximum de vraisemblance : $\max\limits_{m,\sigma^2} \{ \ln \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \}$.

1. Ré-écrire le critère à maximiser de manière plus simple.
2. Ecrire les CPO et montrer que $\widehat{m} = \overline{X}$ et $\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n}$.
3. Construire la matrice hessienne en la solution trouvée.
4. Montrer qu'on est bien à un maximum.

EXERCICE 19
Soit un échantillon de taille N. Soit la droite de régression $y_i = a + bx_i + e_i$. On veut estimer les valeurs de a et de b par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires. Pour cela, il faut résoudre le programme de minimisation suivant : $\min\limits_{a,b} \sum_{i=1}^N e_i^2$.

1. Ecrire les dérivées partielles du problème en fonction de a et de b.
2. Les conditions du premier ordre s'annulent en les solutions $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$. Résoudre le système de deux équations à deux inconnues par substitution.
3. Construire la matrice hessienne (la matrice des dérivées partielles au second ordre du problème en fonction de a et de b).
4. Montrez qu'on est bien à un minimum.

EXERCICE 20
Soit $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ un échantillon iid issu d'une loi binomiale $B(n, p)$, le paramètre entier n étant supposé connu.

1. Déterminez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre p.
2. On suppose à présent que le paramètre n est inconnu. Déterminez l'estimateur par la méthode des moments du vecteur de paramètres.

EXERCICE 21
Soit $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ un échantillon iid issu d'une loi $\Gamma(p, \theta)$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance des paramètres p et θ.
2. Déterminer l'estimateur par la méthode des moments des paramètres p et θ.

EXERCICE 22
Soit $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ un échantillon iid issu de la densité suivante :

$$f(x; \theta, \gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{1}{\theta}(x - \gamma) \right) & \text{si } x > \gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\theta > 0$.

1. Quelle loi cela vous évoque-t-il ?
2. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire.
3. Déterminer les estimateurs par la méthode des moments.
4. Déterminer les estimateurs par la méthode du maximum de vraisemblance.

Propriétés des estimateurs

EXERCICE 23
Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon iid issu d'une loi de Poisson.

1. L'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre est-il convergent ?
2. De variance minimale ?
3. Par quelle loi peut-on alors l'approximer ?
4. Mêmes questions pour la loi de Bernoulli.

EXERCICE 24
Soit (X_1, X_2, X_3, X_4) un échantillon aléatoire d'une loi de Poisson de paramètre λ . On propose les trois estimateurs suivants pour estimer λ :

$$\widehat{\lambda}_1 = 0.3X_1 + 0.7X_2$$
$$\widehat{\lambda}_2 = \overline{X}$$
$$\widehat{\lambda}_3 = \frac{X_1}{2}$$

1. Ces estimateurs sont-ils sans biais pour le paramètre λ ?
2. Parmi ceux qui sont sans biais, lequel est le plus précis ?

EXERCICE 25
Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un échantillon aléatoire issu d'une loi Normale pour laquelle l'espérance et la variance sont identiques de paramètre a.

1. Proposer deux estimateurs de a par la méthode des moments.
2. En calculant la borne CRFD, conclure sur la précision des ces estimateurs.

EXERCICE 26
Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ un échantillon iid issu de la densité suivante :

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \theta & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{2} + \theta & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

1. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire sous-jacente.
2. Déterminer l'estimateur par la méthode des moments de θ.
3. Est-il sans biais ? convergent ?
4. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ (on supposera qu'il y a N_1 observations négatives et N_2 positives dans l'échantillon, avec $N_1 + N_2 = N$).
5. Soit la loi $Y_i = 1_{X_i \geq 0}$. Quelle est cette loi ? Son espérance ? Sa variance ?
6. En déduire l'espérance et la variance de l'estimateur du maximum de vraisemblance.
7. Quel estimateur choisir entre celui des moments et du maximum de vraisemblance ?

EXERCICE 27
Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ un échantillon iid issu de la densité suivante :

$$f(x;\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $\sigma > 0$. On admettra : $\mathbb{E}(X) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\mathbb{E}(X^2) = 2\sigma^2$, $\mathbb{E}(X^3) = 3\sigma^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\mathbb{E}(X^4) = 8\sigma^4$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance.
2. Est-il sans biais ?
3. Est-il convergent ?
4. Est-il efficace ?

Intervalles de confiance et tests

EXERCICE 28
Un échantillon constitué par 10 mesures de diamètre d'une sphère présente une moyenne $\bar{x} = 4,38$cm et un écart-type de $0,06$cm. On suppose ces mesures normalement distribuées.

1. Quelle est la variable aléatoire pivotale pour construire l'intervalle de la l'espérance du diamètre de la sphère.
2. Construire et évaluer l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% et 99%.
3. Tester l'égalité de m à 4.5. Même question pour 4.4.

EXERCICE 29
Les mesures des diamètres d'un échantillon aléatoire de 200 billes de roulement fabriquées par une machine au cours de la semaine précédente fournissent une moyenne de 0.824 cm et un écart-type de 0.042cm.

1. Evaluez l'intervalle de confiance du diamètre moyen des billes pour un niveau de confiance de 95% et 99%.
2. Peut-on assimiler cette mesure à 0.9 ?

EXERCICE 30
Un échantillon de 100 électeurs choisis aléatoirement parmi tous les électeurs d'une même circonscription indique que 55% d'entre eux ont voté pour un candidat donné.

1. Donnez la variable aléatoire pivotale permettant de construire l'intervalle de confiance de la proportion des votes pour ce candidat dans la vraie population.
2. Construire et évaluer l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% et 99%.

EXERCICE 31
Un échantillon de 150 ampoules de marque A a présenté une durée de vie moyenne de 1 400 heures avec un écart-type de 120 heures. Un second échantillon de 200 ampoules de marque B a présenté une durée de vie moyenne de 1 200 heures avec un écart-type de 80 heures. Les deux échantillons sont indépendants.

1. Donnez la variable aléatoire pivotale pour construire l'intervalle de confiance pour les différences de durée de vie moyenne sur les deux populations.
2. Evaluer l'intervalle de confiance pour les différences de durée de vie moyenne sur les deux populations au niveau de confiance de 95% et 90%.
3. Peut-on dire que les durées de vie moyennes sont identiques ?

EXERCICE 32
On s'intéresse à la durée de vie d'ampoules électriques (que l'on suppose normalement distribué). Plus précisément, on souhaite calculer l'intervalle de confiance de l'écart-type de la durée de vie de ces ampoules. Pour cela on a tiré un échantillon comptant 20 ampoules et on a calculé l'écart-type empirique corrigée qui est égal à 100 heures.
Calculez l'intervalle de confiance au niveau de confiance de 95% et de 90%.

EXERCICE 33
Deux échantillons de tailles 16 et 10, respectivement, sont tirés au hasard dans deux populations normales. Leurs variances empiriques non corrigées sont trouvées égales à 24 et 18 respectivement.

1. Déterminez la variable aléatoire pivotale pour construire l'intervalle de confiance du rapport des variances.
2. Calculer l'intervalle de confiance du rapport des variances.