Exercices
Outils Math 1

Chapitre 1

TD

Exercice 1
La demande de montres SLOUK est de 10 unités si le prix est égal à 160 euros et elle est de 20 unités si le prix est 120 euros. Calculer la fonction de demande supposée linéaire.

Exercice 2
Quand le prix est de 100 euros la quantité d'appareils photos de marque PISTOL offerte sur le marché est 50 unités. Quand le prix est 50% plus élevé le nombre d'unités offertes est de 100. Calculer la fonction d'offre supposée linéaire.

Exercice 3
Sur un marché, la demande et l'offre pour un bien sont caractérisés par :

$$D(p) : q = -2p + 6$$
$$S(p) : q = \frac{1}{2}p + 1$$

où p est le prix du bien et q sa quantité. Calculer la quantité d'équilibre et le prix d'équilibre.

Exercice 4
Supposons que la consommation agrégée dans une économie, notée C, soit une fonction linéaire du revenu disponible (hors taxes), noté Y. Supposons qu'il existe un niveau de consommation incompressible, noté C_0. Il s'agit du niveau de consommation observé même si le revenu disponible est nul. On supposera que lorsque le revenu augmente de x, la consommation en écart à son niveau incompressible, *ie* $C - C_0$, augmente de $0,8x$. Déterminer la forme de la fonction de consommation.

Exercice 5
Réorganiser les expressions en forme **implicite** pour les représenter sous forme **explicite** dans le plan donné :

1. $a\ x + b\ y = R$ dans le plan $(0, x, y)$, avec $a > 0$ et $R > 0$.
2. $a\ x + b\ y \leqslant R$ dans le plan $(0, x, y)$.
3. $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} = \bar{U}$ dans le plan $(0, x_1, x_2)$, avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ et $\bar{U} > 0$.
4. $\left[\alpha\ x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\alpha)\ x_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \bar{U}$ dans le plan $(0, x_1, x_2)$, avec $0 < \alpha < 1$, $\sigma \neq 0$, $\sigma \neq 1$ et $\bar{U} > 0$.

Entraînement

Exercice 6

Soit un ménage disposant d'un revenu R de 100. On suppose qu'il ne peut acheter que des bananes et des carottes et que les prix de ces deux biens sont respectivement $p_B = 1$ et $p_C = \frac{1}{2}$ (l'unité dans les deux cas est le kilogramme).

1. Supposons que le ménage décide de consommer la totalité de son revenu en achetant ces deux biens (on admet qu'il ne peut pas consommer une quantité négative de banane ou de carotte). Déterminer l'ensemble des couples de quantités (q_B, q_C) cohérents avec cette hypothèse.
2. Comment cet ensemble est-il modifié si le ménage décide de ne pas consommer la totalité de son revenu ?
3. Représenter graphiquement ces deux ensembles.

Exercice 7

L'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ -x+2y+z=4 \end{cases}$$

est :

A. $(1,1,1)$ B. $(0,1,-1)$ C. $(0,1,2)$.

Exercice 8

L'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ x+z=4 \end{cases}$$

est :

A. $(1,1,1)$ B. vide C. $(x,-1,4-x)$.

Exercice 9

Soient les fonctions d'offre et de demande :

$$D(p) : q = a - p$$
$$S(p) : q = b + 2p$$

où a et b sont des paramètres réels positifs.

1. Interpréter les paramètres a et b.
2. Représenter graphiquement ces fonctions.
3. Déterminer sous quelle condition un prix d'équilibre $p^\star$ existe. Déterminer ce prix.

Chapitre 2

TD

Exercice 10 Soit une proposition P. Montrer, à l'aide d'un tableau de vérité, que $P \wedge P \Longleftrightarrow P$ et $P \vee P \Longleftrightarrow P$.

Exercice 11
Soient P, Q et R trois propositions. Montrer, à l'aide d'un tableau de vérité, que :

1. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
3. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
4. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
5. $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
6. $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$

Exercice 12
Soient P, Q et R trois propositions. Montrer la transitivité de l'implication logique, c'est-à-dire que :

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Exercice 13
Soient P et Q deux propositions. Exprimer l'équivalence logique en termes d'implication logique, en établissant que :

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

Exercice 14
Montrer que l'implication logique suivante :

$$(10^n + 1 \text{ est divisible par } 9) \Rightarrow (10^{n+1} + 1 \text{ est divisible par } 9)$$

est vraie, avec $n \in \mathbb{N}$. Que pensez vous de ces propositions ?

Exercice 15
Montrer les propositions suivantes par récurrence :

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. $\sum_{i=1}^{n} x^{i-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$, avec x un réel différent de 1.

Entraînement

Exercice 16
Soient P, Q et R trois propositions, et $\overline{P}$ la proposition contraire de P. Montrer, à l'aide d'un tableau de vérité, que :

1. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$

2. $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
3. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.
4. $(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$.
5. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Exercice 17

Montrer par récurrence :

1. $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{n}$.
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
3. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
4. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
5. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Chapitre 3

TD

Exercice 18

Soient les ensembles :

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un multiple de } 2\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un multiple de } 3\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un multiple de } 6\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ est un multiple de } 8\}$$

Déterminer les ensembles $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cup C$, $C \cap D$.

Exercice 19

Soient A et B deux sous ensembles de Ω. Illustrer avec des diagrammes de Venn les deux règles de Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Exercice 20

Soient les ensembles $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 3\}$ et $C = \{4, 5\}$. Déterminer les ensembles suivants :

1. $A \times (B \cup C)$
2. $(A \times B) \cup (A \times C)$
3. $A \times (B \cap C)$
4. $(A \times B) \cap (A \times C)$

Exercice 21
Soit E un ensemble tel que $\text{Card}(E) = 30$. Si A et B sont deux sous ensembles de E non disjoints (*ie* $A \cap B \neq \emptyset$) tels que $\text{Card}(A) = 20$, $\text{Card}(B) = 15$ et $\text{Card}(A \cap B) = 6$. Déterminer $\text{Card}(A \cup B)$.

Exercice 22
Les résultats d'une entreprise ont montré que sur 50 employés, 30 sont obèses, 25 souffrent d'hypertension artérielle tandis que 20 ont un taux de cholestérol trop élevé. Parmi les 25 qui souffrent d'hypertension, 12 ont un taux de cholestérol trop élevé ; 15 obèses souffrent d'hypertension et 10 obèses souffrent d'un taux de cholestérol trop élevé ; finalement, 5 employés souffrent de ces trois maux à la fois. Déterminer le nombre d'employés bien portant.

Entraînement

Exercice 23
Soient quatre ensemble A, B, C et D. Déterminer :

1. $\text{Card}(A \cup B \cup C)$
2. $\text{Card}(A \cup B \cup C \cup D)$

Exercice 24
Une autoroute possède 3 sorties principales, chacune d'elle possédant elle-même deux sorties secondaires. Quel est le nombre de façon de quitter l'autoroute ?

Exercice 25
Soient 5 propositions. Combien de lignes contient le tableau de vérité ?

Chapitre 4

TD

Exercice 26
Soient les ensembles :

$$\mathscr{E}_1 = \{(1;2),(2;8),(2;3)\}$$
$$\mathscr{E}_2 = \{(x;y) | x \in \mathbb{R} \wedge x \leqslant y\}$$
$$\mathscr{E}_3 = \{(x;y) | x \in \mathbb{R} \wedge y = x^2\}$$
$$\mathscr{E}_4 = \{(x;y) | y = x^2 \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 2, \quad y = 3 - x \text{ si } 2 < x < 3, \quad y = 3 \text{ si } x = 3\}$$

Déterminez quels ensembles représentent une fonction.

Exercice 27
Soit la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

Calculer :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpréter cette expression.

Exercice 28

La fonction suivante est-elle injective ?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

Exercice 29

Soient les fonctions $f(x) = x + 2$ et $g(x) = 2x + 5$.

1. Calculer $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ et $m(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$.
2. Calculer $f^{-1}(x)$ et $g^{-1}(x)$.
3. Calculer $h^{-1}(x)$ et $m^{-1}(x)$.
4. Calculer $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(x)$ et $\left(g^{-1} \circ f^{-1}\right)(x)$

Comparer les résultats des deux dernières questions.

Exercice 30

Quel est le domaine de définition des fonctions suivantes ?

1. $f(x) = \frac{2}{x}$
2. $f(x) = 4 + \frac{7}{x-2}$
3. $f(x) = 2 + \frac{8}{x^2+2}$
4. $f(x) = 17 + 3x + \frac{1}{x^2-16}$
5. $f(x) = 5 - \frac{2}{x^2-5x+6}$

Exercice 31

Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas nulle.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas l'identité de $\mathbb{R}$.
4. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + 2x + 1$ admet un unique minimum en $x = -1$.

Exercice 33

Sur un marché, la demande et l'offre pour un bien sont caractérisés par :

$$D(p) : q = -2p^2 + 3$$
$$S(p) : q = p^2 + 5p + 2$$

où p est le prix du bien et q sa quantité (on s'intéresse aux valeurs positives de p et q). Calculer la quantité d'équilibre et le prix d'équilibre.

Exercice 34

Montrer qu'il existe un unique polynôme d'ordre deux passant par les points $(0,2)$, $(-2,16)$ et $(1,4)$.

Exercice 35
Calculer les racines de $P(x) = x^2 - 2x - 3$ sans utiliser les formules usuelles.

Exercice 36
Sans calculer le discriminant, montrer que le polynôme $P(x) = x^2 - 2x + 2$ défini sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de solution réelle.

Exercice 37
Soit $P(x) = x^3 - 8x^2 + 23x - 28$. Déterminer les racines du polynôme P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 38
Chercher les solutions des équations suivantes :

1. $x^3 - 2x^2 + 2x = 0$
2. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
3. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
4. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$
5. $x^3 - 4x + \frac{3}{x} = 0$

Exercice 39
Trouver trois entiers naturels consécutifs tels que la somme de leurs carrés est égale à 50.

Exercice 40
Une fonction f est dite paire si $f(-x) = f(x)$ et impair si $f(-x) = -f(x)$. Par exemple, la fonction $f(x) = x^2$ est paire car $f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x = x$, la fonction $f(x) = x^3$ est impaire car $f(-x) = (-x^3) = (-1)^3 x^3 = -x^3$. Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x - e^{-x}$
2. $g(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$
3. $h(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

Exercice 41
Chercher des solutions réelles pour les équations suivantes :

1. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
2. $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$

Exercice 42
Résoudre en x et y les systèmes d'équations suivants :

$$\text{(i)} \begin{cases} e^x e^y &= 10 \\ e^{x-y} &= \frac{2}{5} \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} e^x - 2e^y &= -5 \\ 3e^x + e^y &= 13 \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} 5e^x - e^y &= 19 \\ e^{x+y} &= 30 \end{cases}$$

Exercice 43
Chercher les solutions réelles pour les équations suivantes :

1. $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$
2. $\ln(x + 2) - \ln(x + 1) = \ln(x - 1)$

Entraînement

Exercice 44
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Etudier son sens de variation. Définir que c'est une bijection et calculer sa fonction réciproque.

Exercice 45
Déterminer les solutions de l'équation suivante :

1. $x^2 - 4x\sqrt{2} + 6 = 0$.
2. $x^2 + x + 1 = 0$.

Exercice 46
Soit la fonction suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Résoudre $f(x) = 0$.

Exercice 47
Soit la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 2$ définie pour toutes valeurs de x dans $\mathbb{R}$. Identifier $x^\star$ qui minimise f puis calculer $f(x^\star)$.

Exercice 48
Calculer $(x+2)^5$ directement puis avec le binôme de Newton.

Exercice 49
Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x - 2$
2. $f(x) = 17x^2 - \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
4. $f(x) = \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3}$
5. $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$
6. $f(x) = \frac{x^2-7}{x-3}$
7. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}$.

Chapitre 5

TD

Exercice 50
Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+3x^2}{4e^x+2x^2}$
4. $\lim_{x\to 1} \frac{3x\ln x}{x^2-x}$

Exercice 51

Identifier les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{x^2-3}$
2. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4x^2+8}{x^2+6}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+c}{kx^2+lx+m}$
4. $\lim_{x\to-4} \frac{x^2-16}{x+4}$
5. $\lim_{x\to0^+} \frac{|x|}{x}$ et $\lim_{x\to0^-} \frac{|x|}{x}$
6. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$
7. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x}-x$
8. $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-4}$

Exercice 52

Soit la fonction à valeurs réelles définie par morceaux :

$$f(x)=\begin{cases} 6x+8 & \text{si } x\leqslant -1 \\ -3x+7 & \text{si } -1<x<2 \\ x-1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 53

Soit la fonction à valeurs réelles définie par morceaux :

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+1 & \text{si } x\leqslant 2 \\ x^2+ax+b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donner les conditions sur les paramètres a et b pour que la fonction soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 54

Soit la fonction f sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, définie par :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\ln|x|} & \text{si } x\notin\{-1,0,1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En quels points la fonction f est-elle continue ?

Exercice 55

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$:

$$f(x)=\frac{1+x}{x^3+1}$$

Cette fonction est-elle continue en -1 ? Est-il possible de la prolonger par continuité en -1 ?

Exercice 56

En utilisant la définition de la dérivée, calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=4x^2+3$
2. $g(x)=x^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$
3. $h(x)=\frac{1}{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}^\star$
4. $j(x)=\sqrt{1+x}$

Pour $g(x)$ vous utiliserez la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

où $m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ la fonction factorielle.

Entraînement

Exercice 57

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim_{x\to 1} x^2 - 3x + 7$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-8x^2+19x-12}{x^2-3x+2}$
4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$

Exercice 58

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Etudier sa continuité sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{1/x} & \forall x \in \left]-\infty, -1/2\right] \\ \dfrac{4}{e^2} & \forall x \in \left]-1/2, 1\right] \\ \dfrac{4}{e^2} + \ln x & \forall x \in \left]1, +\infty\right] \end{cases}$$

Exercice 59

Même question pour :

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & \forall x \in \left]-1, 1\right[\\ 0 & \forall x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[\end{cases}$$

Exercice 60

Même question pour :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Chapitre 6

TD

Exercice 61

Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

Calculer $f'(0)$ si elle existe.

Exercice 62

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x^2 + x^4 + 1)$
2. $g(x) = x^2 \ln(x^2 + x^4 + 1)$
3. $h(x) = e^{2x}$
4. $j(x) = \ln\left(\frac{x^3-2}{x^2+1}\right)$
5. $l(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
6. $p(x) = x^x$

Exercice 63

Trouver l'expression générale de la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{\theta x}$
2. $g(x) = \frac{1}{x}$
3. $h(x) = \ln(x)$
4. $i(x) = \frac{1}{1-x}$
5. $j(x) = \frac{1}{1+x}$
6. $k(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Exercice 64

Soient a, b et c trois paramètres réels. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Exercice 65

Une fonction continue sur E dont la dérivée s'annule jamais peut-elle être périodique sur E ?

Exercice 66

Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et f' admettent des dérivées finies en $+\infty$. Montrer que la limite de la dérivée doit être nulle.

Exercice 67

Montrer qu'il est possible d'écrire la fonction exponentielle sous la forme :

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

En déduire une approximation de la constante e.

Exercice 68

Montrer l'égalité suivante au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

Exercice 69

Faire une étude de la fonction (en identifiant les optima) :

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$$

Exercice 70

Faire une étude de la fonction (en identifiant les optima) :

$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$$

Exercice 71

Faire une étude de la fonction (en identifiant les optima) :

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2}$$

Exercice 72

Montrer que si la fonction $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ admet deux extrema, alors l'un est un maximum et l'autre un minimum.

Exercice 73

Soit le prix de vente unitaire du bien fixé à p.

1. Calculer le profit du producteur si son coût total à produire est donné par $C(q) = 60q + 2q^2$.
2. Pour quelle valeur de q maximisera-t-il son profit ?

Exercice 74

La somme de deux nombres positifs est égale à 100. Trouver les couples de nombres tels que :

1. Le produit de ces nombres est maximal.
2. La somme des carrés est minimale.

Entraînement

Exercice 75

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

La fonction f est :

A. continue sur $[-1, 2]$ et dérivable sur $]-1, 2[$
B. continue et dérivable sur $]-1, 2[$
C. continue et dérivable sur $[-1, 2]$.

Exercice 76

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est-elle :

A. continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
B. continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$
C. continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 77

La fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par $f(x)=\ln(x^2-1)^3$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Sa fonction dérivée f' est définie par :

A. $\frac{2x}{x^2-1}$ B. $\frac{6x}{x^2-1}$ C. $\frac{3x}{x^2-1}$.

Exercice 78

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x\ln|x| & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

A. f est décroissante sur $[-1/e,1/e]$
B. f est croissante sur $[-1/e,0]$ et décroissante sur $[0,1/e]$
C. f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 79

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5^{-x}$ admet pour dérivée :

A. -5^{-x} B. -5×-5^{-x} C. $-\ln 5\times 5^{-x}$.

Exercice 80

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Etudier sa continuité et sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} f(x)=\frac{1}{x^2}e^{1/x} & \forall x\in\,]-\infty,-1/2]\\ f(x)=\frac{4}{e^2} & \forall x\in\,]-1/2,1]\\ f(x)=\frac{4}{e^2}+\ln x & \forall x\in\,]1,+\infty]\end{array}$$

Exercice 81

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & \forall x\in\,]-1,1[\\ 0 & \forall x\in\,]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\end{cases}$$

Exercice 82

Dresser le tableau de variation de la fonction f :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

Exercice 83

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Etudier son sens de variation. Définir que c'est une bijection et calculer sa fonction réciproque.

Exercice 84

Supposons que la demande d'un bien soit une fonction du revenu : $c(R) = 3\sqrt{R}$. Calculer l'élasticité revenu : $\epsilon_R = \dfrac{c^{'}(R)}{\frac{c(R)}{R}}$.

Exercice 85

Déterminer les ensembles de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x - 2$
2. $f(x) = 17x^2 - \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
4. $f(x) = \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3}$
5. $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$
6. $f(x) = \frac{x^2-7}{x-3}$
7. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}$.

Exercice 86

Soit U la fonction d'utilité d'un agent. On définit l'aversion absolue pour le risque par : $A_U(x) = -\frac{U^{''}(x)}{U^{'}(x)}$ et l'aversion relative comme : $R_U(x) = -x\frac{U^{''}(x)}{U^{'}(x)}$ avec x le niveau de richesse de l'agent, $U^{'}$ et $U^{''}$ respectivement les dérivées première et seconde de la fonction U si elles existent. Calculer les aversions absolues et relatives pour le risque pour les fonctions suivantes :

1. $U(x) = ax + b$
2. $U(x) = \ln(x)$
3. $U(x) = \frac{1}{1-r}x^{1-r}$
4. $U(x) = -e^{-ax}$

Exercice 87

Un agent économique cherche à maximiser son utilité en consommant un bien. Sa fonction d'utilité est $U(x) = \ln(x) - e^{x-1}$ avec x la quantité consommée. Pour quelle quantité consommée $x^{\star}$ l'agent maximise-t-il son utilité ?

Exercice 88

A l'aide de la formule de Taylor-Young, calculer un développement limité de :

1. $f(x) = \sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. $g(x) = \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
3. $h(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
4. $i(x) = \ln(2+2x+x^2)$ à l'ordre 2 au voisinage de 2.

Chapitre 7

TD

Exercice 89
Soit la suite de terme général $u_n = u_{n-1} + 1$ pour $n \geqslant 1$, avec la condition initiale $u_1 = 1$. **(1)** Donner une expression de u_n en fonction du rang n. **(2)** Soit la suite $v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$ pour $n \geqslant 1$. Quelle est la condition initiale de cette suite ? Déterminer v_n.

Exercice 90
Soit la suite de terme général $u_n = \rho u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ avec la condition initiale $u_0 = 1$ et $0 < \rho < 1$. **(1)** Donner une expression de u_n en fonction du rang n et de sa condition initiale. **(2)** Montrer que u_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini en établissant que l'on peut rendre arbitrairement petite la distance entre u_n et 0 à partir du moment où n est assez grand. **(3)** Dans le cas où la suite admet une limite, combien d'itérations faut-il pour réduire de moitié la distance à la limite ? **(4)** Montrer que la suite diverge si $\rho > 1$.

Exercice 91
Soit la suite de terme général $u_n = \frac{n+2}{n}$. Montrer que cette suite a pour limite 1.

Exercice 92
Quel est le comportement asymptotique de la suite de terme général $u_n = -n$.

Exercice 93
Soit la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$. Montrer que cette suite admet 0 pour limite.

Exercice 94
Soit la suite $(u_n) \in \mathbb{Q}$ définie par :

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{2} + \frac{1}{u_{n-1}}$$

avec $u_1 = 2$.

1. Donner les premiers termes de la suite.
2. Montrer que la suite est inférieurement bornée par $\sqrt{2}$.
3. Calculer le point fixe de la suite.
4. Montrer que la suite est monotone décroissante.
5. Conclure sur le comportement asymptotique, la limite de la suite est-elle dans $\mathbb{Q}$?
6. Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$ et en déduire que $u_n - \sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2^n}$.

Entraînement

Exercice 95
Pour la suite géométrique u de raison $\sqrt{2}$ et $u_2 = 5$, le terme u_{10} est égal à :

A. $80\sqrt{2}$ B. 160 C. 80.

Exercice 96
La suite u est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2^n\, u_n$. u_n est égal à :

A. 2^{n^2} B. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ C. $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 97

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + (0.1) + \cdots + (0.1)^n$. La suite u_n converge vers :

A. 10/9 B. 9/10 C. 11/10.

Exercice 98

La suite u est géométrique, de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$. La suite $v = \ln u$ est :

A. géométrique de raison e^q B. arithmétique de raison q C. arithmétique de raison $\ln q$.

Exercice 99

Soit la suite u définie sur $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$
$$u_0 = 1, u_1 = 2$$

1. Soit la suite v de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que v est une suite géométrique. Calculer v_n en fonction de n.
2. En déduire u_n en fonction de n. La suite u est-elle convergente ?
3. Déterminer le rang p à partir duquel :

$$\left| u_n - \frac{7}{3} \right| \leqslant 10^{-6}$$

Exercice 100

Un agent place un montant de 2 000 euros au taux de 5% l'an. De plus, il ajoute 500 euros tous les ans.

1. Ecrire l'équation de récurrence correspondante.
2. L'écrire sous forme générale.
3. Quelle est la condition initiale ?
4. Quel est le montant à l'issue de 10 ans ?
5. Au bout de combien de temps le capital double-t-il ?

Exercice 101

Sur un marché la demande pour un bien à la date t est linéaire par rapport au prix du bien :

$$D(p_t): \ q_t = a - b\ p_t$$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs. Sur le même marché, la quantité offerte à la date t dépend du prix à la date $t-1$:

$$S(p_{t-1}): \ q_t = c + d\ p_{t-1}$$

où c et d sont deux paramètres réels positifs. Les offreurs utilisent le prix de la date précédente pour anticiper le prix aujourd'hui : on dit qu'ils ont des anticipations naïves.

1. Montrer que la quantité offerte est égale à la quantité demandée si et seulement si le prix à la date t est donné par :

$$p_t = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}\ p_{t-1}$$

2. Calculer le point fixe $p^\star$ (ou état stationnaire) de cette équation de récurrence pour le prix. Quelle hypothèse faut-il poser sur les paramètres pour que ce prix ait un sens ?
3. Montrer que $p^\star$ est le prix d'équilibre sur ce marché. Calculer la quantité échangée à l'équilibre.
4. Calculer le prix à la t.
5. Donner la condition sous laquelle le prix converge vers $p^\star$. Commenter. La convergence est-elle monotone ?

Exercice 102

Sur un marché, l'offre et la demande sont caractérisées par :

$$\begin{aligned} S(p): \quad & q = 1+p \\ D(p): \quad & q = 2-p \end{aligned}$$

1. Calculer le prix d'équilibre $p^\star$ et les quantités échangées à l'équilibre, $q^\star$.
2. Supposons que le marché ne soit pas équilibré. On admet que dans une situation de déséquilibre, le prix augmente la demande est supérieure à l'offre (demande excédentaire positive). Plus formellement on admet que le prix est mis à jour à l'aide de la récurrence suivante :
$$p_{t+1} = p_t + \alpha(D(p_t) - S(p_t))$$
Déterminer le point fixe de cette récurrence, c'est-à-dire le prix $\overline{p}$ tel que $\overline{p} = \overline{p} + \alpha(D(\overline{p}) - S(\overline{p}))$. Comparer $\overline{p}$ et $p^\star$.
3. Supposons que le prix initial p_1 soit différent de $\overline{p}$. Exprimer p_t en fonction de p_0 et α.
4. Montrer que la chronique de prix converge de façon monotone vers $\overline{p}$ si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
5. Quelles sont les prédictions du modèle si α est en dehors de cet intervalle ?

Chapitre 8

TD

Exercice 103

Soit la fonction $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_2 + 4$.

1. Résoudre le système des conditions du premier ordre
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$
pour déterminer un extremum possible.
2. Calculer la matrice hessienne
$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$
en le point candidat trouvé à la question précédente (si nécessaire).

3. Calculer les mineurs de la matrice hessienne. Le point candidat est-il un maximum ? Un minimum ?

Exercice 104

Soit un consommateur qui envisage d'acquérir les quantités x_1 et x_2 de biens 1 et 2 (dont les prix respectifs sont p_1 et p_2), qui dispose d'un revenu R et dont la fonction d'utilité est $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

1. Ecrire la contrainte budgétaire du consommateur.
2. Ecrire le programme du consommateur.
3. En se plaçant à l'optimum, ré-écrire le programme par substitution.
4. Le résoudre.

Entraînement

Exercice 105

Soit un échantillon de taille N. Soit la droite de régression $y_i = a + bx_i + e_i$. On veut estimer les valeurs de a et de b par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires. Pour cela, il faut résoudre le programme de minimisation suivant : $\min\limits_{a,b} \sum_{i=1}^{N} e_i^2$.

1. Ecrire les dérivées partielles du problème en fonction de a et de b.
2. Les conditions du premier ordre s'annulent en les solutions $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$. Résoudre le système de deux équations à deux inconnues par substitution.
3. Construire la matrice hessienne (la matrice des dérivées partielles au second ordre du problème en fonction de a et de b).
4. Montrez qu'on est bien à un minimum.

Exercice 106

Soit une suite de n variables aléatoires $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ identiquement et indépendamment distribuées selon une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ de densité de probabilités $\phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. On veut estimer les paramètres m et σ^2 en résolvant le programme du maximum de vraisemblance : $\max\limits_{m,\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \ln \phi(x_i) \right\}$.

1. Ecrire les CPO et montrer que $\widehat{m} = \overline{X}$ et $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n}$.
2. Construire la matrice hessienne en la solution trouvée.
3. Montrer qu'on est bien à un maximum.

Auteurs du chapitre

- Stéphane Adjemian,
- Frédéric Karamé.