L1 Economie-Gestion

Analyse microéconomique

Introduction générale

F. Karamé
(frederic.karame@univ-lemans.fr)

Année universitaire 2023-2024

Ce qu'il faut savoir avant de commencer :

- reconnaître des droites, les inéquations, les manipuler, les représenter dans un plan.
- manipuler des fonctions, les représenter dans un plan.
- les formules sur les dérivées
- s'adapter aux changements de notation
- maximisation/minimisation de fonctions à une variable

Références bibliographiques :

- Microéconomie, J.P. Gayant, Dunod.
- La microéconomie en schémas, E. Darmon et O. L'haridon, Ellipses.

Ressources en ligne : http://f.karame.free.fr/teaching.php

3 parties :

1. le consommateur.
2. le producteur.
3. l'équilibre.

Partie 1 : le consommateur

Chapitre 1 : les préférences et l'utilité

F. Karamé
(frederic.karame@univ-lemans.fr)

Année universitaire 2023-2024

1. analyser la manière dont un consommateur prend ses décisions.

   - Les b & s consommés comme les goûts des consommateurs sont variés.

     ⇒ un cadre d'analyse avec un nombre très restreint de règles de comportement mais suffisamment générales pour appréhender les préférences très variées des consommateurs.

2. une construction utilisable pour traiter de questions économiques :

   - Comment un consommateur décide-t-il de dépenser son revenu entre les différents biens de consommation ? Que se passe-t-il si le prix de l'un des biens augmente ou si ses ressources diminuent ? Peut-il exister des biens dont la consommation augmente quand le prix s'accroît ? ...

     ⇒ traduire numériquement les préférences du consommateur : une fonction qui mesure l'utilité, càd la satisfaction associée à la consommation.

3. Représentation graphique des préférences :

   ⇒ courbes d'iso-utilité ou d'indifférence : comme des courbes de niveaux sur une carte, mais ce sont des niveaux de satisfaction.

Hypothèse : chaque individu a des préférences qui lui sont propres.

- elles sont **subjectives**,
- définies par une relation de préférences, qui est régie par certaines règles ou **axiomes** dont on suppose qu'ils représentent tous les éléments de la subjectivité, des goûts de l'individu considéré, et supposées communes à tous.
- Ces règles vont définir l'agent comme **rationnel**. Modifier les règles implique un écart à la rationalité.

Notre objectif :

1. définir avec grand soin les propriétés supposées être vérifiées par l'ensemble des agents économiques.
2. les traduire numériquement

Un panier de biens est une collection de biens ou services qu'un individu s'apprête à consommer.

Il s'exprime comme un vecteur de quantités consommables : ainsi, pour n biens différents, on notera $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Le cas le plus simple est celui d'un panier de $n = 2$ biens ; par exemple le café et le thé.

Un panier particulier sera noté ici $(x_1; x_2)$, avec les quantités x_1 de café et x_2 de thé.

On veut construire une relation de préférence qui permettra de décrire le choix de l'individu entre deux paniers, par exemple $A = (5; 3)$ et $B = (2; 7)$.

$\geqslant$ permet de classer les nombres, $\succsim$ permet de classer les paniers en fonction des préférences.

$\succsim$ désigne une relation de préférence ou indifférence

$A \succsim B$ signifie que l'individu préfère A à B ou est parfaitement indifférent entre A et B.

Donc si le panier A est préféré ou indifférent au panier B, on écrira $A \succsim B$.

Dans le cas contraire, $B \succsim A$.

Si l'agent est indifférent entre A et B, on notera simplement : $A \sim B$.

Définition : Relation de préférence ou indifférence.

On appelle relation de préférence ou indifférence définie sur l'ensemble des paniers de n biens, la relation *binaire* qui incarne l'expression des préférences d'un consommateur entre toute paire de paniers de biens.

Si, aux yeux du consommateur, le panier de biens A est préféré ou indifférent au panier de biens B, on notera alors $A \succsim B$.

Hypothèse : tous les individus respectent quatre axiomes :

1. la réflexivité : n'importe quel panier de bien *A* est préféré ou indifférent à lui-même.

2. La transitivité : quels que soient 3 paniers de biens *A*, *B* et *C*, si *A* est préféré ou indifférent à *B* et si *B* est préféré ou indifférent à *C* alors nécessairement *A* sera préféré ou indifférent à *C*.

3. La complétude : quels que soient 2 paniers de biens *A* et *B*, soit *A* est préféré ou indifférent à *B*, soit *B* est préféré ou indifférent à *A*, soit les deux.

4. La non-saturation : si *A* et *B* sont deux paniers de biens tels que
   - la quantité de chacun des biens disponibles est au moins aussi grande dans le panier *A* que dans le panier *B* ;
   - il existe au moins un bien en quantité strictement supérieure dans le panier *A* par rapport au panier *B*,

   alors *A* est strictement préféré à *B*.

   Autrement dit : le consommateur préfère plus que moins.

1. Réflexivité : $\forall A \in \mathbb{R}^{+n}$, $A \succsim A$.

2. Transitivité : $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{+n}$, si $A \succsim B$ et $B \succsim C$, alors $A \succsim C$.

3. Complétude : $\forall A, B \in \mathbb{R}^{+n}$, $A \succsim B$ ou $B \succsim A$ ou les deux $A \sim B$.

4. Non-saturation : $\forall A = (x_1; ...; x_n) \in \mathbb{R}^{+n}$ et $B = (y_1; ...; y_n) \in \mathbb{R}^{+n}$ tels que
   - o $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, x_i \geqslant y_i$
   - o $\exists j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $x_j > y_j$

   alors $A \succ B$

Règles raisonnables et intuitives . . . mais fragiles : par expl : la non saturation

Il existe des cas où la consommation d'une unité supplémentaire de bien n'apportera pas de satisfaction supplémentaire et, au contraire, la fera même décroître.

par exemple le gâteau au chocolat !

Néanmoins, on va considérer que dans des circonstances "normales" (et dans le cadre canonique de la recherche du meilleur panier de biens sous un budget limité), l'axiome de non saturation est pertinent.

Supposons les 4 axiomes (réflexivité, transitivité, complétude et non saturation) vérifiés.

Il faudrait **traduire numériquement** les préférences de l'individu considéré, c'est-à-dire de caractériser une fonction numérique qui associe, à chaque panier de biens, une valeur représentant sa satisfaction, càd d'autant plus grande que le panier est apprécié.

Désignons par $u(.)$ cette fonction *de satisfaction* ou *d'utilité*.

C'est une fonction à n variables (les quantités d'un panier de n biens).

Chaque individu consommateur a sa fonction $u(.)$.

Si un panier A est préféré ou indifférent à un panier B, la valeur numérique $u(A)$ associée au panier A sera supérieure ou égale à la valeur numérique $u(B)$ associée au panier B.

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{+n}, A \succsim B \Leftrightarrow u(A) \geqslant u(B)$$

Définition : fonction d'utilité

On appelle fonction d'utilité définie sur l'ensemble des paniers de n biens, la fonction numérique qui associe à tout panier de biens une valeur d'autant plus forte que le panier est apprécié par le consommateur considéré.

Si $A = (x_1; x_2; ...; x_n)$ désigne un panier de n biens, l'utilité éprouvée par le consommateur est notée $u(A) = u(x_1; x_2; ...; x_n)$.

L'utilité est **subjective** : il n'y a donc pas d'échelle universelle pour la mesurer (comme la température ou la distance).

On dit donc que l'utilité est une mesure **ordinale** et **non cardinale** : elle indique des valeurs numériques dont l'ordre est parfaitement fidèle à l'ordre des préférences du consommateur entre les paniers.

Elle sert donc à classer. Seule la hiérarchie entre les valeurs numériques a une signification ; les valeurs numériques prises isolément n'en ont aucune.

Mathématiquement, la fonction d'utilité est définie à une transformation croissante près, qui ne changera pas l'ordre des préférences du consommateur.

Si $f(.)$ est une fonction croissante, alors :

$$u(A) \geqslant u(B) \Leftrightarrow f[u(A)] \geqslant f[u(B)]$$

Les fonctions d'utilité peuvent prendre de multiples formes.

Une exigence essentielle : la satisfaction éprouvée doit croître lorsque l'on augmente la quantité consommée d'un des biens ou services, *toutes choses égales par ailleurs* (c'est-à-dire, ici, lorsque les quantités consommées des autres biens ou services sont inchangées).

Mathématiquement, la fonction est croissante relativement à chacune de ses variables.

Exemple : $u(x_1; x_2) = x_1^2 x_2$

Cette fonction est bien croissante relativement à chacune de ses variables.

Ici l'agent a une préférence pour le bien 1 relativement au bien 2.

L'utilité associée au panier $A = (5; 3)$ est $u(A) = 5^2 \times 3 = 75$.

L'utilité d'un panier qui contiendrait 1 unité supplémentaire de bien 2 : $A' = (5; 4)$ donne $u(A') = 5^2 \times 4 = 100 > u(A)$.

L'utilité a bien augmenté avec l'augmentation de la quantité consommée de bien 2.

Il en va de même en augmentant la quantité consommée de l'autre bien.

La dérivé première d'une fonction d'une seule variable f en un point x_0 particulier est définie comme la limite du rapport de l'accroissement de cette fonction relativement à l'accroissement de sa variable lorsque ce dernier tend vers 0.

La dérivé de f est notée $f^{'}(x)$:

$$\frac{df}{dx}(x) = f^{'}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

Soit $\forall x \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ une fonction de n variables réelles.

La dérivé partielle de la fonction f relativement à la variable x_i, notée $\dfrac{\partial f(x_1; \ldots; x_i; \ldots; x_n)}{\partial x_i}$, est définie comme la limite du rapport de l'accroissement de la fonction relativement à l'accroissement de la variable x_i lorsque ce dernier tend vers 0.

Ainsi :

$$\frac{\partial f(x_1; \ldots; x_i; \ldots; x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x_1; \ldots; x_i + \epsilon; \ldots; x_n) - f(x_1; \ldots; x_i; \ldots; x_n)}{\epsilon}$$

Remarque 1 : une seule variation infinitésimale ($\epsilon \to 0$) à la fois ! $\Leftrightarrow$ Toutes choses égales par ailleurs !

Remarque 2 : il y a autant de dérivées partielles que de variables.

Mathématiquement, une fonction à plusieurs variables sera croissante relativement à l'une de ses variables si sa dérivée partielle, relativement à cette variable, est positive.

Si $u(x_1; ...; x_n)$ désigne une fonction à n variables réelles, $u(.)$ est croissante relativement à la variable x_i si

$$\forall i, \quad \frac{\partial u(x_1; \dots; x_i; \dots; x_n)}{\partial x_i} \geqslant 0$$

Il y a autant de dérivées partielles que de variables.

On dérive normalement la fonction $u(.)$ par rapport à x_i en considérant que tous les autres variables sont des constantes (puisque c'est toutes choses égales par ailleurs).

Le fait que la fonction d'utilité soit croissante relativement à chacune de ses variables est une conséquence directe de l'axiome de Non Saturation.

Exemple : $u(x_1; x_2) = x_1 x_2^{1/2}$

$$U_{m,1} = \frac{\partial u(x_1; x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial (x_1 x_2^{1/2})}{\partial x_1} = x_2^{1/2} \frac{\partial (x_1)}{\partial x_1} = x_2^{1/2} > 0$$

$$U_{m,2} = \frac{\partial u(x_1; x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial (x_1 x_2^{1/2})}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial (x_2^{1/2})}{\partial x_2} = x_1 \frac{1}{2} x_2^{-1/2} > 0$$

Les deux dérivées partielles sont positives. Donc la fonction est croissante en chaque variable :

$$u(\underset{+}{x_1}; \underset{+}{x_2})$$

Définition : Utilité marginale d'un bien

L'utilité marginale d'un bien est le surcroît de satisfaction engendré par la consommation d'une quantité supplémentaire infinitésimale de ce bien.

On notera $U_{m,i}$ l'utilité marginale du bien i.

$$U_{m,i} = \frac{\partial u(x_1; \ldots; x_i; \ldots; x_n)}{\partial x_i}$$

Une notion essentielle, on le verra bientôt . . .

Définition : Taux marginal de Substitution entre 2 biens

Le Taux marginal de Substitution entre 2 biens est une mesure des proportions dans lesquelles un consommateur est prêt à échanger un bien contre un autre sans que ne soit modifié le niveau de sa satisfaction.

C'est le nombre d'unités de bien 2 qu'il faut donner au consommateur pour qu'il accepte de renoncer à la consommation d'une quantité infinitésimale de bien 1 sans que sa satisfaction ne soit modifiée.

On notera $TmS_{i,j}$ le Taux marginal de Substitution entre les biens i et j.

$$TmS_{i,j} = \frac{dx_j}{dx_i}$$

A ne pas confondre avec le taux de substitution.

Soit $u(x_1; x_2) = x_1 x_2^{1/2}$. Soit le panier $(3; 4)$. La satisfaction associée est $u(3; 4) = 3 \times 4^{1/2} = 6$. Quelle quantité de bien 2 (Δx_2) donner à l'individu pour qu'il renonce à une unité de bien 1 ($\Delta x_1 = -1$), en laissant son utilité inchangée ?

Puisqu'il perd une unité de bien 1 ($\Delta x_1 = -1$) contre Δx_2 supplémentaires de bien 2, on a donc un panier $(3 - 1; 4 + \Delta x_2)$ dont l'utilité est 6. Il faut donc résoudre l'équation à 1 inconnue :

$$\begin{aligned} & (3-1) \times (4 + \Delta x_2)^{1/2} = 6 \\ \Leftrightarrow\ & (4 + \Delta x_2)^{1/2} = 3 \\ \Leftrightarrow\ & 4 + \Delta x_2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & \Delta x_2 = 9 - 4 = 5 \end{aligned}$$

L'individu acceptera d'échanger une unité de bien 1 contre 5 unités de bien 2. Cela définit le **taux de substitution** $TS_{1,2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{5}{1}$ (qui est forcément négatif puisque c'est un échange).

Le taux de substitution est grand (en valeur absolue) : 5 contre 1.

On peut le comprendre en examinant les exposants associés aux variables x_1 et x_2 dans la fonction d'utilité.

Ils indiquent le poids relatif dans les préférences entre le bien 1 et le bien 2 (1 contre 1/2)

L'individu apprécie le bien 2 mais (relativement) encore plus le bien 1.

De plus, on part d'une situation avec peu de bien 1 (3 seulement) et on en retire 1 unité ! C'est donc une grosse perte à compenser !

Pour conserver l'utilité inchangée, il faut donc accorder en compensation beaucoup de bien 2.

Le TmS est différent du TS.

C'est la quantité de bien 2 qu'il faut accorder au consommateur pour qu'il accepte de renoncer à la consommation d'une quantité infinitésimale de bien 1 sans que cela modifie sa satisfaction initiale.

Il sera donc question de dérivée partielle !

Propriété : Taux marginal de Substitution entre 2 biens

ou $TmS_{i,j}$ entre les biens i et j :

$$TmS_{i,j} = \frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{U_{m,i}}{U_{m,j}}$$

Soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$$

on peut décomposer toute variation infinitésimale de y (dy) en la somme des variations des variables de la fonction (dx_1, dx_2, ..., dx_n), pondérée par les dérivées partielles ($\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$) :

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Soit (x_1, x_2) l'ensemble des paniers de biens procurant une satisfaction égale à U :

$$u(x_1, x_2) = U$$

La différentielle totale s'écrit :

$$dU = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2$$

Comme l'utilité doit rester inchangée : $dU = 0$.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 \\
\Leftrightarrow \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 &= -\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 \\
\Leftrightarrow \frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2}} \\
\Leftrightarrow TmS_{1,2} \equiv \frac{dx_2}{dx_1} &= -\frac{U_{m,1}}{U_{m,2}}
\end{aligned}$$

Dans notre exemple : $u(x_1; x_2) = x_1 x_2^{1/2}$.

$$U_{m,1} = \frac{\partial u(x_1; x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial (x_1 x_2^{1/2})}{\partial x_1} = x_2^{1/2} \frac{\partial (x_1)}{\partial x_1} = x_2^{1/2}$$

$$U_{m,2} = \frac{\partial u(x_1; x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial (x_1 x_2^{1/2})}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial (x_2^{1/2})}{\partial x_2} = x_1 \frac{1}{2} x_2^{-1/2}$$

$$TmS_{1,2} = -\frac{U_{m,1}}{U_{m,2}} = -\frac{x_2^{1/2}}{\frac{1}{2} x_1 x_2^{-1/2}} = -\frac{2 x_2^{1/2} x_2^{1/2}}{x_1} = -\frac{2x_2}{x_1}$$

La situation initiale est le panier $(3; 4)$:

$$TmS_{1,2}(3; 4) = -\frac{2 \times 4}{3} = -\frac{8}{3} \left(= \frac{dx_2}{dx_1} \right)$$

Les proportions de l'échange sont donc $dx_2 = 8$ unités de bien 2 contre $dx_1 = 3$ unités de bien 1.

Le TmS dépend du panier de la situation initiale.

On a défini :

- la relation de préférence ou indifférence incarnant les goûts du consommateur représentatif,
- la fonction numérique qui traduit ses goûts : la fonction d'utilité.

Quelle représentation graphique des préférences ?

Prenons un panier de 2 biens (x_1 et x_2 désignant toujours les quantités des 2 biens). La représentation sera donc dans un espace à 3 dimensions $(0, x_1, x_2, u)$.

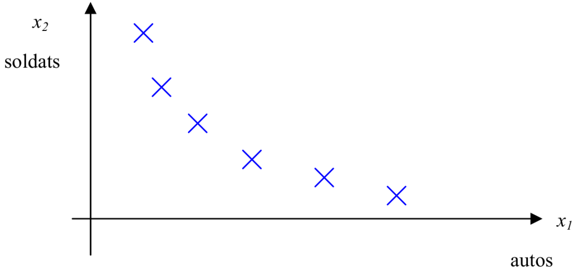
Courbes d'iso-utilité : des courbes reliant les paniers apportant le même niveau de satisfaction au consommateur dans le plan $(0, x_1, x_2)$.

Aussi appelées **courbes d'indifférence** puisque relient l'ensemble des paniers de biens entre lesquels le consommateur est indifférent.

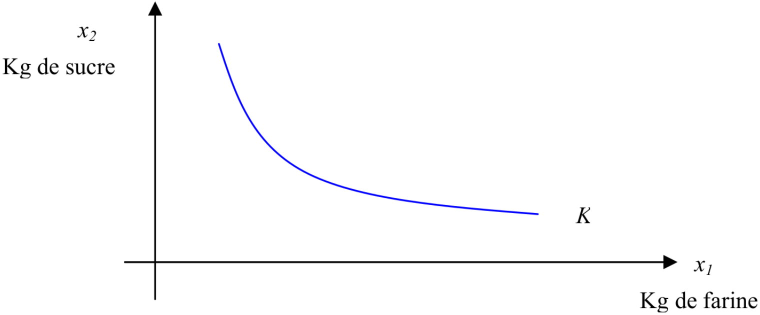
Même principe que les lignes de niveaux sur une carte représentant les lieux situés à une même altitude ou les courbes isobares représentant les lieux soumis au même niveau de pression atmosphérique.

Définition : Courbe d'indifférence ou d'iso-utilité

C'est l'ensemble des paniers de biens (x_1, x_2) dont la consommation procure le même niveau d'utilité à un consommateur particulier. Si l'on désigne par K ce niveau de satisfaction, l'ensemble est défini comme $\{(x_1, x_2) \mid u(x_1; x_2) = K\}$. On dit aussi que les paniers (x_1, x_2) vérifient l'égalité : $u(x_1; x_2) = K$.



Pour deux biens indivisibles : $(x_1, x_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: ébauche d'une courbe décroissante : si l'on diminue la quantité détenue d'un bien, il faut augmenter la quantité de l'autre bien pour que le niveau de satisfaction reste inchangé (et inversement) (voir la section des taux de substitution).



Pour deux biens divisibles : $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$: la courbe d'indifférence de niveau K.

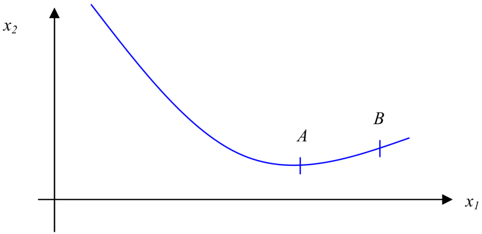
Propriétés :

Les courbes d’indifférence

- ne sont pas croissantes,
- ne se croisent pas,
- correspondent à des niveaux d’utilité d’autant plus élevés qu’on se déplace vers le haut et/ou la droite (vers le Nord-Est du plan).

Croissante ? Par l'absurde : supposons 2 paniers A et B sur la partie croissante d'une même courbe d'indifférence.

Ceci ne peut pas se produire :

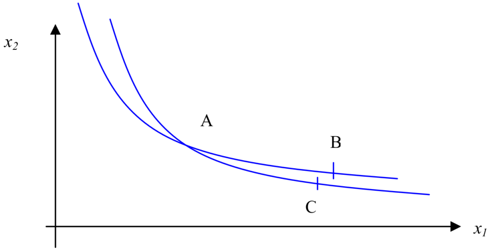


- Implique les deux paniers sont indifférents : $A \sim B$.
- Implique $x_1^B > x_1^A$ et $x_2^B > x_2^A$ ce qui implique $B \succ A$ (axiome de non saturation).

L'hypothèse étant contredite, les courbes d'indifférence ne sont pas croissantes.

Se croisent ? Par l'absurde : supposons 3 paniers A, B et C dans cette position.

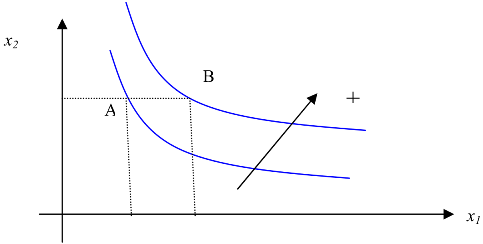
Ceci ne peut pas se produire :



- Implique $A \sim B$, $A \sim C$ et donc $C \sim B$.
- Implique $x_1^B > x_1^C$ et $x_2^B > x_2^C$ ce qui implique $B \succ C$ (axiome de non saturation).

L'hypothèse étant contredite, les courbes d'indifférence ne peuvent se croiser.

L'utilité augmente vers le Nord-Est ? Supposons 2 paniers A et B sur deux courbes d'indifférence dans cette position.



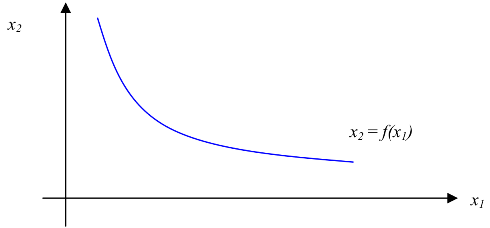
Comme $x_1^B > x_1^A$ et $x_2^A = x_2^B$, implique $B \succ A$, d'après l'axiome 4 (non saturation).

Donc $u(B) > u(A)$ et donc plus on se déplace vers le Nord-Est, plus l'utilité augmente.

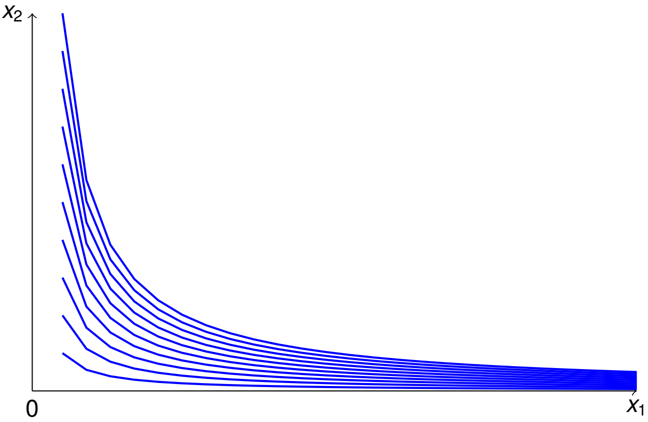
Soit la fonction d'utilité $u(x_1; x_2) = x_1^2 x_2^2$. Représenter la courbe d'indifférence de niveau K dans le plan $(0, x_1, x_2)$.
Pour un niveau d'utilité K donné, on repart de la définition et on la manipule pour obtenir une expression de $x_2 = f(x_1)$:

$$\begin{aligned} u(x_1; x_2) = K &\Leftrightarrow x_1^2 x_2^2 = K \\ &\Leftrightarrow x_2^2 = \frac{K}{x_1^2} \\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{K^{1/2}}{x_1} = K^{1/2} x_1^{-1} \end{aligned}$$

facile à représenter graphiquement dans l'espace de consommation :



Application pour différentes valeurs de K



Une fonction d'une seule variable f est

- concave si $f^{''}(x) \leqslant 0$.
- convexe si $f^{''}(x) \geqslant 0$.
- linéaire si $f^{''}(x) = 0$.

La courbe est continue, décroissante et strictement convexe.

Décroissante car $f'(x_1)(=\frac{df(x_1)}{dx_1}) < 0$:

$$\left(K^{1/2}x_1^{-1}\right)' = K^{1/2}(-1)x_1^{-2} < 0$$

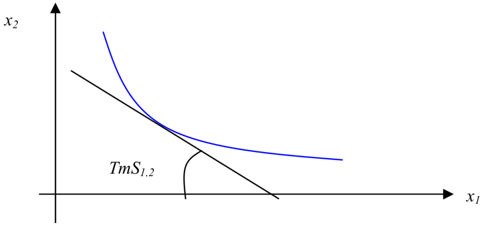
Convexe car $f''(x_1)(=\frac{d^2f(x_1)}{d(x_1)^2}) > 0$: (on se souvient que $f''(x_1) = [f'(x_1)]'$) :

$$\left(K^{1/2}(-1)x_1^{-2}\right)' = K^{1/2}(-1)(-2)x_1^{-3} = 2K^{1/2}x_1^{-3} > 0$$

Comment visualiser le TmS ?

Pour une fonction numérique $x_2 = f(x_1)$ représentée graphiquement dans le plan $(0, x_1, x_2)$ (x_1 en abscisse et x_2 en ordonnée), $\frac{dx_2}{dx_1}$ mesure en un point, la pente de la tangente à la courbe en ce point.

Or, pour une courbe d'indifférence, $\frac{dx_2}{dx_1} = TmS_{1,2}$, le Taux marginal de Substitution entre les biens 1 et 2.



Toutes les courbes d'indifférence tracées jusqu'à présent sont (strictement) convexes.

Ceci traduit la convexité des préférences du consommateur.

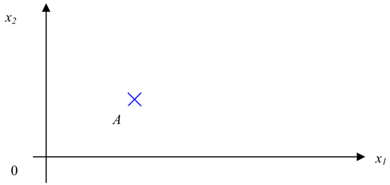
Attention : c'est le cas majoritaire mais pas général en microéconomie : les préférences de certains consommateurs sur certains types de paniers de biens peuvent ne pas être convexes.

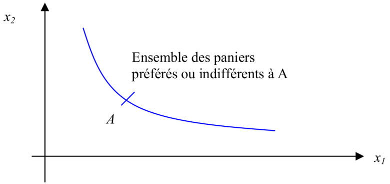
Nous considérerons donc des cas de préférences non strictement convexes,

- soit parce que le type de biens composant le panier ne se prête pas à l'existence de cette propriété,
- soit parce que les goûts du consommateur s'écartent de ce qui s'apparente à un comportement majoritaire (sans qu'on puisse qualifier le consommateur d'irrationnel.

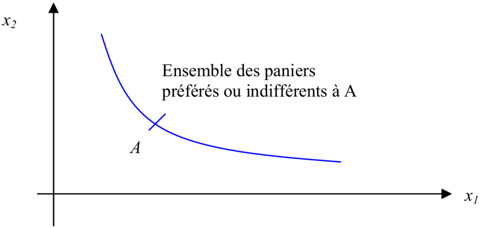
Définition : Convexité des préférences

Les préférences d'un individu sont (strictement) convexes si pour tout panier *A*, l'ensemble des paniers préférés ou indifférent à *A* est (strictement) convexe.





Biens imparfaitement substituables : calculer le TmS en plusieurs points.



Ainsi, les préférences sont convexes si l'ensemble ci-dessus décrit est lui-même convexe.

L'ensemble est bien convexe car toute combinaison linéaire convexe de points de cet ensemble appartient elle-même à l'ensemble.

Dans le cas de paniers de 2 biens, les préférences du consommateur sont (strictement) convexes si et seulement si ses courbes d'indifférence sont (strictement) convexes.

Une fonction f est concave/convexe/linéaire si l'image, par la fonction f, d'une combinaison linéaire convexe d'abscisses est supérieure/inférieure/égale à la même combinaison linéaire convexe des images de ces abscisses.

Ainsi, dans le cas d'une fonction d'une seule variable et $\forall x, x' \in \mathbb{R}$, $\forall \lambda \in [0, 1]$,

- f est concave ssi :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x') \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$$

- f est convexe ssi :

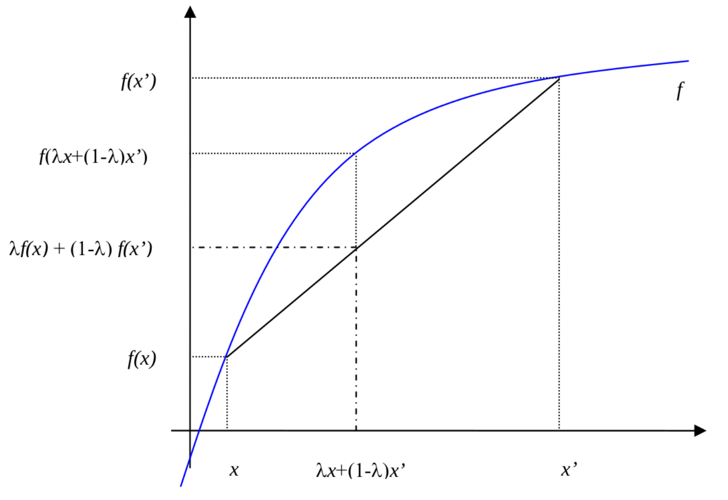
$$f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$$

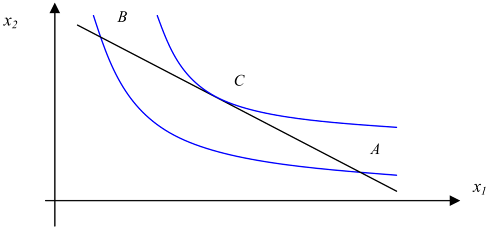
- f est linéaire ssi :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x') = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x')$$

Dans le cas d'une fonction de plusieurs variables, ces définitions sont formellement identiques, à ceci près que les abscisses x et x' sont désormais des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Illustration graphique d'une fonction concave





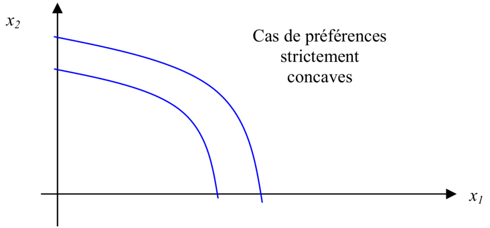
A et *B* sont deux paniers "extrêmes" : *A* contient bcp de bien 1 et peu de bien 2 et le contraire pour *B*. Néanmoins $A \sim B$.

Tout panier du segment $[A, B]$ est construit comme une combinaison linéaire convexe des paniers *A* et *B*.

C par exemple est plus équilibré que *A* et *B* dans son contenu en biens 1 et 2.

C est sur une courbe d'indifférence au Nord-Est donc : $C \succ A \sim B$.

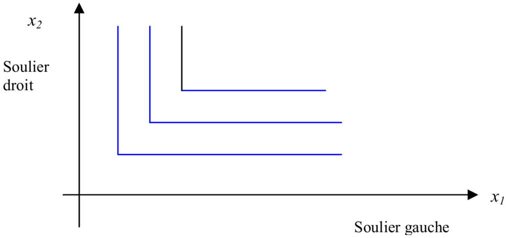
On interprète la convexité des préférences comme le goût pour la variété, la diversité, les mélanges.



Concavité des préférences : préférence non pour la variété, mais pour l'uniformité (comportement de collectionneur, de préférence géographique, d'addiction, ...).

Par exemple, un consommateur préférera n'acheter ensemble que des produits alimentaires locaux ou, à l'inverse, que des produits alimentaires exotiques.

Situation atypique qui peut poser des difficultés de résolution et, plus largement, susceptible d'invalider certains résultats majeurs en microéconomie



Biens complémentaires : dont la consommation conjointe et en proportions données engendre un niveau de satisfaction déterminé qui ne sera pas accru par la consommation additionnelle isolée d'un des biens.

L'exemple classique : souliers droit et gauche d'une paire de chaussures.

Fonctions d'utilité du type $u(x_1; x_2) = \min\{.\}$.

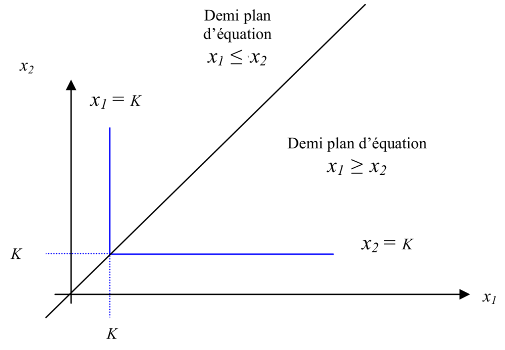
La fonction $\min$ traduit l'intuition que la satisfaction sera limitée par le nombre d'unité de biens la plus faiblement présente dans le panier.

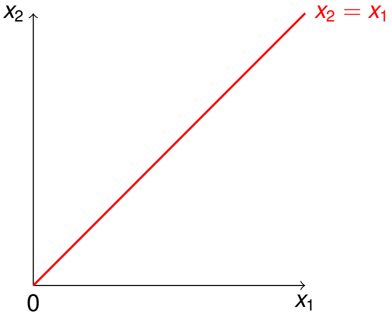
Expression ultime de la préférence pour la diversité : sans variété, ici pas de satisfaction.

$u(x_1\,;x_2) = \min\{x_1\,;x_2\} = K.$

2 cas possibles :

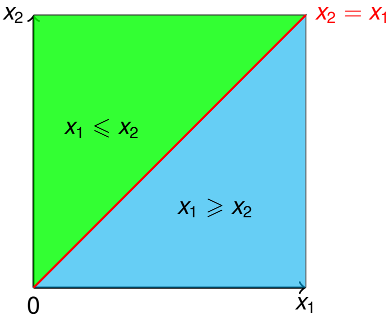
- si $x_1 \leqslant x_2$: $\min\{x_1\,;x_2\} = x_1$, donne $x_1 = K$, la demi-droite verticale uniquement au-dessus de la droite $x_1 = x_2$.
- si $x_2 \leqslant x_1$: $\min\{x_1\,;x_2\} = x_2$, donne $x_2 = K$, la demi-droite horizontale uniquement à droite de la droite $x_1 = x_2$.



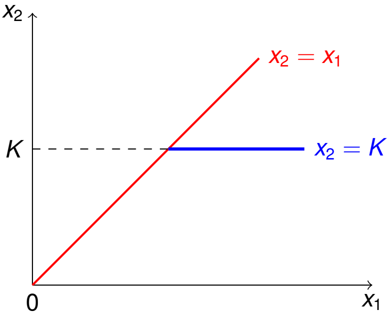


C'est la droite de séparation du plan ou droite des coudes

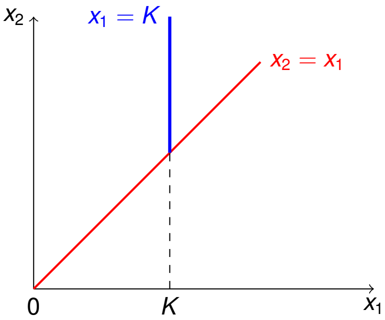
Exemple



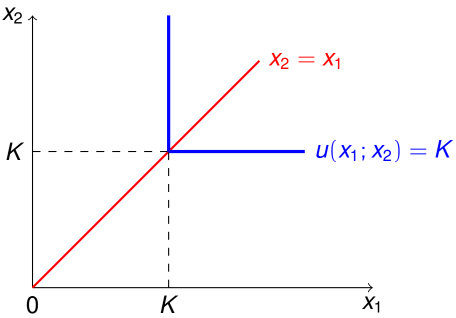
Elle sépare le plan en 2 zones correspondant aux inéquations (si vous n'arrivez pas à repérer les zones, placer un point dans une zone et tester avec ses coordonnées).



$$x_2 \leqslant x_1 \Rightarrow u(x_1; x_2) = \min(x_1; x_2) = x_2 = K$$

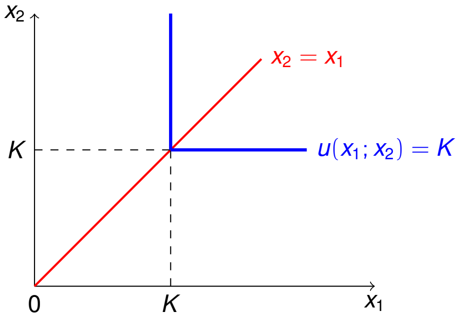


$$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow u(x_1; x_2) = \min(x_1; x_2) = x_1 = K$$

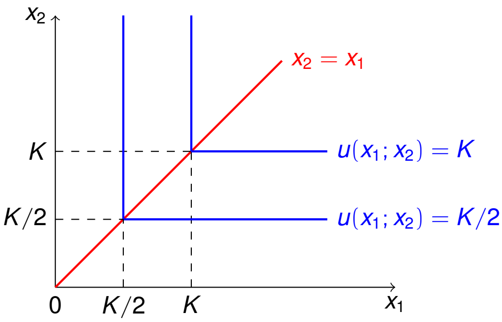


x_2
$x_2 = x_1$
K
$u(x_1; x_2) = K$
0
K
x_1

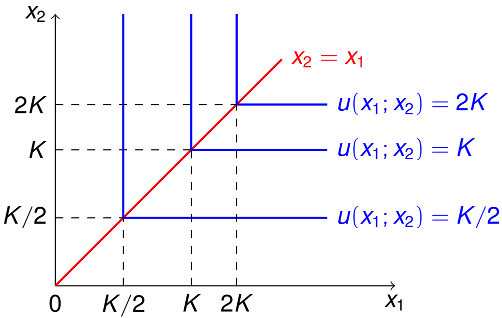
Tous les coudes des courbes d'indifférence sont sur la droite des coudes :

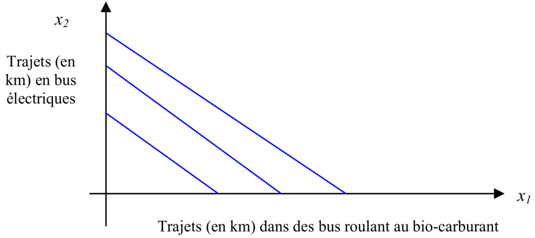


Tous les coudes des courbes d'indifférence sont sur la droite des coudes :



Tous les coudes des courbes d'indifférence sont sur la droite des coudes :





Biens parfaitement substituables : dont la consommation engendre un niveau de satisfaction déterminé par la quantité globale consommée, indépendamment de la ventilation des quantités consommées entre les différents biens.

Par exemple : les trajets en transports urbains dans des bus roulant au bio-carburant (bien 1) ou à l'électricité (bien 2).

Fonctions d'utilité du type additif, par exemple : $u(x_1; x_2) = x_1 + x_2 \Rightarrow$ la droite $x_2 = K - x_1$ dans le plan $(0, x_1, x_2)$ avec comme ordonnée à l'origine K.

Partie 1 : le consommateur

Chapitre 2 : La décision optimale du consommateur

F. Karamé
(frederic.karame@univ-lemans.fr)

Année universitaire 2023-2024

- Ici : confronter les préférences des individus du chapitre 1 à une contrainte à laquelle chacun est soumis : la contrainte budgétaire.

- Les choix sont budgétairement contraints : chacun tente de constituer le meilleur panier possible au regard de ses ressources limitées : processus d'optimisation sous contraintes

- lorsqu'on dépense tout ou partie de ses ressources, on se prive d'opportunités extérieures : donc les choix s'apparentent à des sacrifices mais si rationnel, choix du moindre sacrifice : la renonciation à la consommation la moins psychologiquement coûteuse.

- formalisons la contrainte budgétaire pesant sur le consommateur.

- le consommateur ne dispose que d'un revenu limité.

- les biens sont caractérisés par un prix unitaire non nul

- nous allons travailler en supposant que le prix des biens et le revenu du consommateur sont des données **exogènes** dans un cadre d'équilibre partiel

- On verra plus tard comment les prix se forment dans un cadre d'équilibre général

Définition : Variable exogène versus variable endogène

Dans la modélisation d'un phénomène économique, une variable est dite exogène quand la valeur qu'elle prend est déterminée extérieurement au modèle. Par opposition, une variable dont la valeur se détermine lors de la résolution du modèle est dite endogène.

On ne s'intéresse pas à comment les prix et le revenu de l'agent sont déterminés (équilibre général)

Hypothèses :

- les prix existent et s'imposent au consommateur,
- ce dernier dispose d'un revenu R fixé et constant.

Les prix et le revenu donnés délimitent l'ensemble des paniers de biens susceptibles d'être acquis par l'individu : c'est l'**ensemble budgétaire du consommateur**.

Soit R le revenu du consommateur et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les prix **unitaires** des biens 1, 2, . . . , n.

L'ensemble des paniers de biens qu'il sera possible au consommateur d'acquérir est délimité par l'inégalité suivante :

$$\text{Dépenses} \leqslant \text{Ressources}$$

Il est possible de réécrire cette inéquation en exprimant la somme des dépenses en valeur d'une part, les ressources d'autre part.

$$\underbrace{\overbrace{p_1 x_1}^{\text{dépenses en bien 1}} + \overbrace{p_2 x_2}^{\text{dépenses en bien 2}} + \cdots + \overbrace{p_n x_n}^{\text{dépenses en bien } n}}_{\text{dépenses totales de consommation}} \leqslant R$$

C'est la **contrainte budgétaire** du consommateur.

Définition : contrainte budgétaire du consommateur

La contrainte budgétaire du consommateur est l'inégalité qui caractérise l'ensemble des paniers de biens que le consommateur est susceptible d'acquérir étant donné son revenu et les prix auxquels les biens sont vendus. Dans le cas d'un panier de n biens, elle s'écrit :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \leqslant R$$

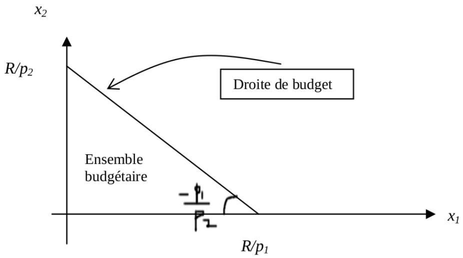
En posant $n = 2$ biens dans l'économie :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant R$$

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leqslant R \Leftrightarrow \; p_2x_2 \leqslant R - p_1x_1 \Leftrightarrow \; x_2 \leqslant \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

L'équation associée à la contrainte budgétaire ou droite de budget est la droite de séparation du plan de consommation $(0, x_1, x_2)$.

$$p_1x_1 + p_2x_2 = R \Leftrightarrow \; x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1$$



de pente $-\frac{p_1}{p_2}$, d'abscisse à l'origine $\frac{R}{p_1}$ et l'ordonnée à l'origine $\frac{R}{p_2}$.

L'ensemble budgétaire est l'ensemble des paniers possibles. Il est sous la droite de budget.

Les axes sont-ils inclus dans l'ensemble budgétaire ?

Lorsqu'un panier est positionné sur l'axe des abscisses, la quantité consommée du bien 2 est nulle : $x_2 = 0$.

Lorsqu'un panier est positionné sur l'axe des ordonnées, la quantité consommée du bien 1 est nulle : $x_1 = 0$.

Souhaitable pour être en mesure de traiter d'applications pertinentes (biens que l'on ne consomme qu'épisodiquement au cours de sa vie : biens immobiliers, automobiles, meubles, ...)

Pas toujours l'hypothèse retenue dans le cas de paniers de biens de consommation courante, lorsque l'on raisonne sur un horizon de temps court. L'hypothèse généralement retenue est alors celle de biens nécessaires.

Définition : Bien nécessaire

Un bien est nécessaire si, dès que le revenu est strictement positif, la quantité consommée de ce bien est strictement positive (même si elle est infime).

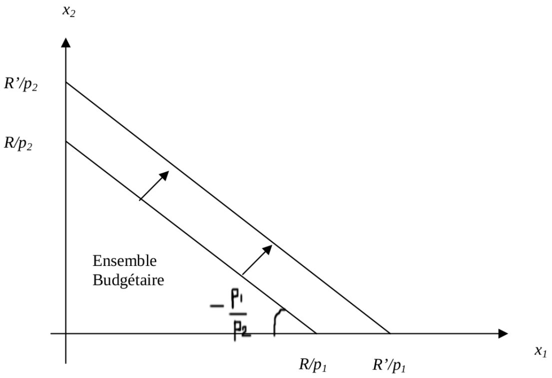
Se traduit par $x_i > 0$.

Conduit à des solutions intérieures par opposition à des solutions en coin (une quantité nulle)

Le revenu augmente de R à R' ($R' > R$) : extension de l'ensemble budgétaire

La pente de la droite de budget $-\frac{p_1}{p_2}$ est inchangée

En revanche ses abscisse $\frac{R}{p_1}$ et ordonnée $\frac{R}{p_2}$ à l'origine augmentent $\Rightarrow$ **déplacement de la droite parallèlement à elle-même, en translation**

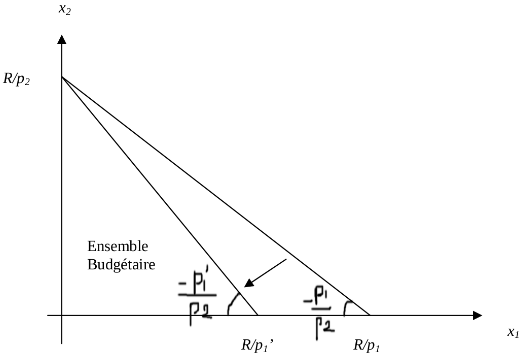


Le prix du bien 1 passe de p_1 à p_1' ($p_1' > p_1$) : contraction de l'ensemble budgétaire

l'ordonnée à l'origine $\frac{R}{p_2}$ ne change pas

la droite devient plus pentue : de $-\frac{p_1}{p_2}$ à $-\frac{p_1'}{p_2}$

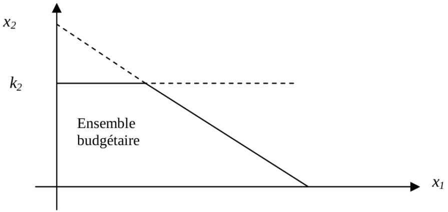
l'abscisse à l'origine diminue : de $\frac{R}{p_1}$ à $\frac{R}{p_1'}$ $\Rightarrow$ **la droite pivote en $\frac{R}{p_2}$ vers la gauche de $\frac{R}{p_1}$ à $\frac{R}{p_1'}$**

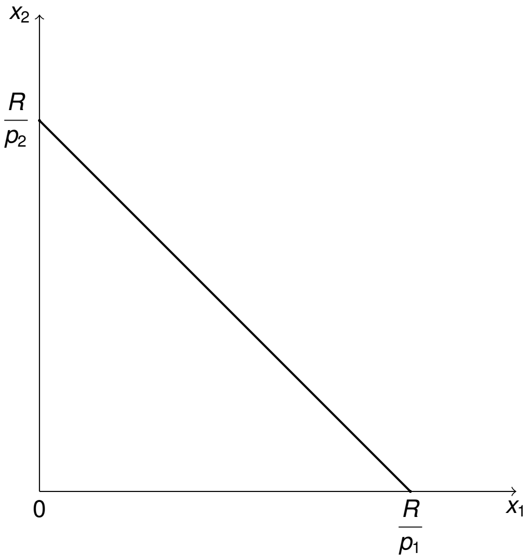


Le consommateur ne peut acheter autant d'unités de bien qu'il le souhaite (guerre, pénurie, opérations promotionnelles, ...).

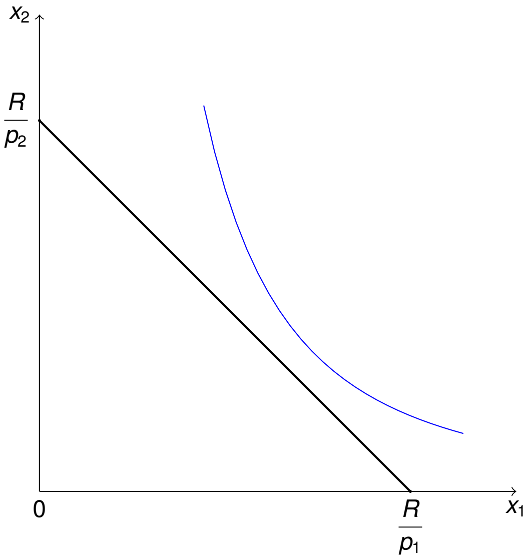
L'ensemble budgétaire est réduit.

Si la quantité maximale de bien 2 est limitée à k_2, on écrira dans le programme du consommateur $x_2 \leqslant k_2$ et la partie de l'ensemble budgétaire située au dessus de la droite horizontale d'équation $x_2 = k_2$ devient inaccessible.

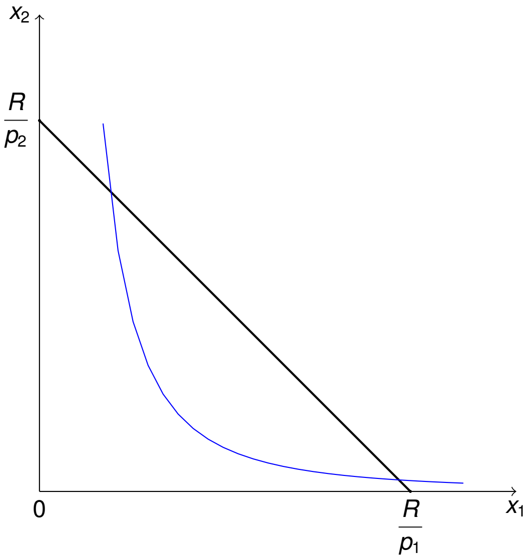



x_2
$\frac{R}{p_2}$
0
$\frac{R}{p_1}$
x_1

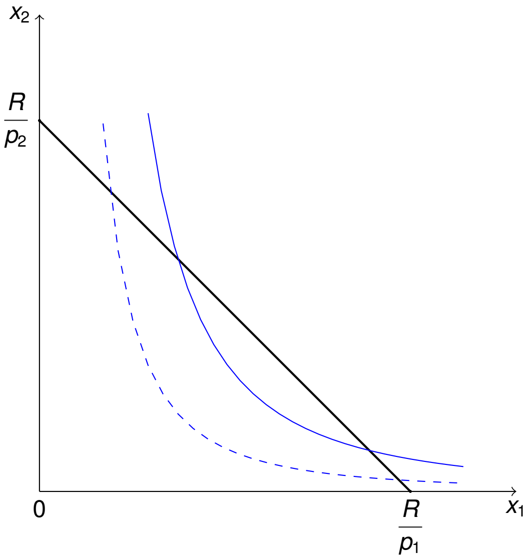
Recherche du maximum de satisfaction : est-ce possible ?



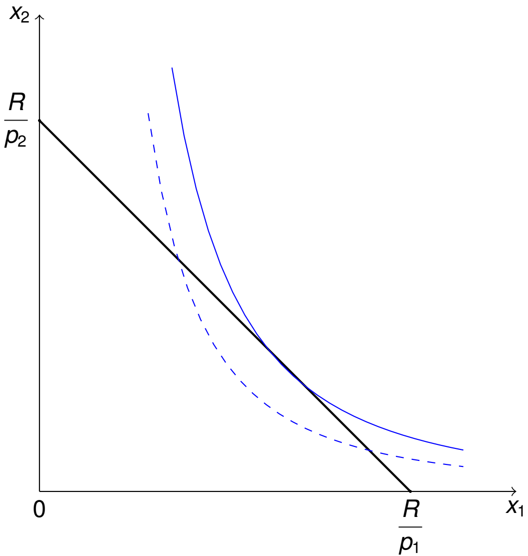
Recherche du maximum de satisfaction : est-ce possible ?

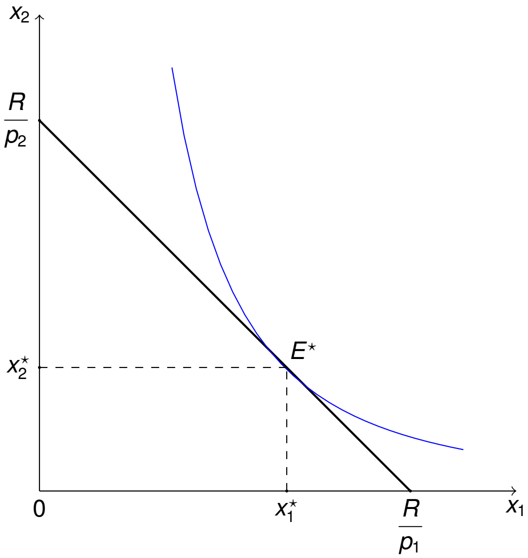


Recherche du maximum de satisfaction : est-ce possible ?

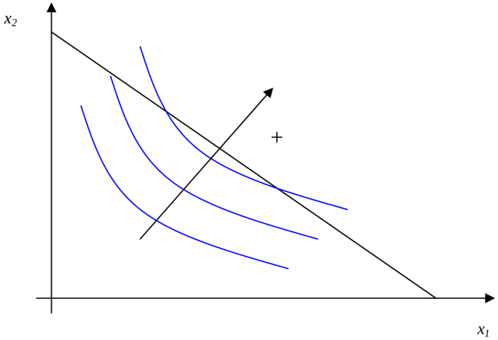


Recherche du maximum de satisfaction : on est bien là ?



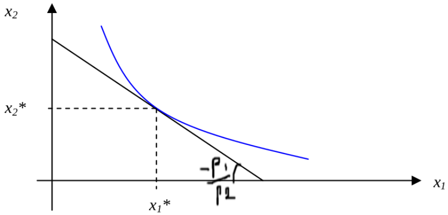

x_2
$\frac{R}{p_2}$
$x_2^\star$
$E^\star$
0
$x_1^\star$
$\frac{R}{p_1}$
x_1

La droite de budget et le faisceau des courbes d'indifférence du consommateur : à chaque courbe d'indifférence correspond un niveau particulier de satisfaction et ce niveau de satisfaction est d'autant plus grand que la courbe est située vers le haut et la droite.



La décision optimale du consommateur est sur la plus haute courbe d'indifférence compatible avec l'ensemble budgétaire

Le panier de biens $E^\star = (x_1^\star; x_2^\star)$ est l'optimum, c'est-à-dire le panier de biens qui apporte le plus haut niveau de satisfaction possible au consommateur (étant donnés les prix des biens et son revenu).



A l'optimum, la courbe d'indifférence est précisément tangente à la droite de budget, ou la tangente à la courbe d'indifférence en ce point $E^\star$ est confondue avec la droite de budget. Les pentes des deux droites (la tangente et la droite de budget) sont donc égales à l'optimum

$$TmS_{1/2}(E^\star) = -\frac{p_1}{p_2}$$

Caractérisation de la décision optimale du consommateur (1)

La décision optimale du consommateur est un panier de biens $E^\star = (x_1^\star; x_2^\star)$ tel que le Taux marginal de Substitution entre les biens soit égal au rapport des prix des biens, encore appelé prix relatif.

$$TmS_{1/2}(E^\star) = -\frac{p_1}{p_2}$$

L'optimum consiste à égaliser le ratio de substitution "subjectif" (le TmS) et le ratio de substitution "objectif" (le rapport des prix).

$$TmS_{1/2}(E^\star) = -\frac{U_{m,1}}{U_{m,2}} = -\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{U_{m,1}}{U_{m,2}} = \frac{p_1}{p_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{U_{m,1}}{p_1} = \frac{U_{m,2}}{p_2}$$

C'est la condition équi-marginale.

Elle repose sur l'égalité des termes $\frac{U_{m,i}}{p_i}$, $\forall i \in [1, \ldots, n]$

s'interprète comme mesurant le surcroît de satisfaction par euro dépensé obtenu grâce à la dernière unité consommée du bien *i*.

comme une mesure de rendement d'un euro dépensé dans chaque bien.

Caractérisation de la décision optimale du consommateur (2) : la condition equi-marginale

La décision optimale du consommateur est un panier de biens $E^\star = (x_1^\star ; x_2^\star)$ tel que le surcroît de satisfaction par euro dépensé obtenu grâce à la dernière unité consommée du bien 1 soit égal au surcroît de satisfaction par euro dépensé obtenu grâce à la dernière unité consommée du bien 2.

$$\frac{U_{m,1}}{p_1} = \frac{U_{m,2}}{p_2}$$

Si la condition equi-marginale n'est pas vérifiée, le consommateur peut réorganiser ses dépenses à budget constant pour augmenter sa satisfaction.

Si $\frac{U_{m,1}}{p_1} > \frac{U_{m,2}}{p_2}$, il est plus efficace de réorganiser la dépense en diminuant la consommation de bien 2 pour augmenter la consommation de bien 1

Si $\frac{U_{m,1}}{p_1} < \frac{U_{m,2}}{p_2}$, il est plus efficace de réorganiser la dépense en diminuant la consommation de bien 1 pour augmenter la consommation de bien 2

Si $\frac{U_{m,1}}{p_1} = \frac{U_{m,2}}{p_2}$, il est plus efficace de ne rien faire...

L’hypothèse de convexité stricte des préférences implique que le panier optimal est un panier qui contient des quantités strictement positives du bien 1 et du bien 2 (ce que l’on appelle une solution intérieure).

En l’absence de l’hypothèse de convexité stricte des préférences, la condition equi-marginale n’est pas nécessairement vérifiée à l’optimum.

lorsque les préférences sont strictement convexes, la condition equi-marginale peut aussi ne pas être vérifiée en cas de présence d’un rationnement effectif.

Le programme du consommateur :

$$\max_{(x_1;x_2;\ldots;x_n)} u(x_1;x_2;\ldots;x_n)$$

$$sc : p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leqslant R$$

et pour $n = 2$

$$\max_{(x_1;x_2)} u(x_1;x_2)$$

$$sc : p_1x_1 + p_2x_2 \leqslant R$$

La décision optimale du consommateur est un panier de biens $E^\star = (x_1^\star; x_2^\star)$ tq :

$$TmS_{1/2}(E^\star) = -\frac{p_1}{p_2} \Leftrightarrow \frac{U_{m,1}}{p_1} = \frac{U_{m,2}}{p_2}$$

Résolution du programme de maximisation sous contrainte si $n = 2$

$$\max_{(x_1;x_2)} u(x_1;x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$
$$sc : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant R$$

1. on applique une transformation croissante à la fonction d'utilité pour en simplifier l'expression.
2. On sature la contrainte de budget $p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$.
3. On exprime x_2 en fonction de x_1.
4. On remplace x_2 dans la fonction d'utilité transformée pour se ramener à un problème de minimisation à une variable x_1 sans contrainte.
5. On résoud la CPO $\frac{\partial(.)}{\partial x_1}|_{x_1=x_1^\star} = 0$ pour trouver $x_1^\star$.
6. On déduit $x_2^\star$ de la solution en utilisant la contrainte budgétaire.

$\Rightarrow$ On a donc $x_1^\star(p_1;p_2;R)$ et $x_2^\star(p_1;p_2;R)$, les fonctions de demande de biens à l'optimum.

Posons $u(x_1; x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$

Le programme du consommateur :

$$\max_{(x_1;x_2)} u(x_1; x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

$$sc : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant R$$

1. On va transformer la fonction d'utilité à maximiser pour la rendre plus facile à manipuler. Prenons par exemple : $v = 2 \ln u$. C'est une transformation croissante donc cela ne change pas la solution du problème.

$$\begin{aligned} v = 2 \ln u(x_1 ; x_2) &= 2 \ln \left(x_1^{1/2} x_2^{1/2} \right) \\ &= 2 \ln \left(x_1^{1/2} \right) + 2 \ln \left(x_2^{1/2} \right) \\ &= 2 \frac{1}{2} \ln (x_1) + 2 \frac{1}{2} \ln (x_2) \\ &= \ln (x_1) + \ln (x_2) \end{aligned}$$

2. La contrainte budgétaire est forcément saturée si l'agent est rationnel :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = R$$

En effet, l'argent non dépensé ne sert pas à la consommation

Donc on pourrait augmenter la satisfaction en consommant plus et ainsi mieux satisfaire l'objectif recherché.

3. On va procéder par substitution : comme on a une relation entre x_1 et x_2 :

$$x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

4. On remplace dans l'objectif :

$$\begin{aligned} v &= \ln(x_1) + \ln(x_2) \\ &= \ln(x_1) + \ln\left(\frac{R - p_1 x_1}{p_2}\right) \\ &= \ln(x_1) + \ln(R - p_1 x_1) - \ln(p_2) \end{aligned}$$

Le programme de maximisation d'une fonction à 2 variables sous contrainte peut donc se réécrire comme un programme de maximisation d'une fonction à 1 variable SANS contrainte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{(x_1;x_2)} u(x_1;x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2} \\ sc : p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant R \end{array} \right. \Leftrightarrow \max_{x_1} \{\ln(x_1) + \ln(R - p_1 x_1) - \ln(p_2)\}$$

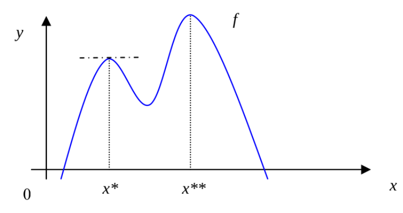
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un maximum en $x^\star$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x^\star) \geqslant f(x)$$

Théorème (Conditions nécessaires d'optimalité) : si f admet un maximum en $x^\star$, alors

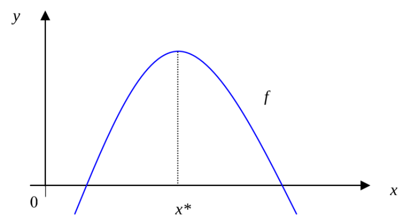
$$\text{CPO} : f'(x)|_{x=x^\star} = 0$$
$$\text{CSO} : f''(x)|_{x=x^\star} \leqslant 0$$

Conditions nécessaires mais non suffisante : ici $x^{\star\star}$ est maximum



Conditions nécessaires et suffisantes : si f est concave, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un maximum en $x^\star$ ssi :

$$\text{CPO} : f'(x)|_{x=x^\star} = 0$$
$$\text{CSO} : f''(x)|_{x=x^\star} < 0$$



5. On résoud : on écrit la Condition du Premier Ordre (CPO) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x_1} &= \frac{\partial \left\{\ln\left(x_1\right) + \ln\left(R - p_1 x_1\right) - \ln\left(p_2\right)\right\}}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial \left\{\ln\left(x_1\right)\right\}}{\partial x_1} + \frac{\partial \left\{\ln\left(R - p_1 x_1\right)\right\}}{\partial x_1} - \frac{\partial \left\{\ln\left(p_2\right)\right\}}{\partial x_1} \\
&= \frac{1}{x_1} + \frac{-p_1}{R - p_1 x_1} - 0 \\
&= \frac{1}{x_1} - \frac{p_1}{R - p_1 x_1}
\end{aligned}$$

En la solution $x_1 = x_1^\star$, la dérivée première est nulle :

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}\Big|_{x_1 = x_1^\star} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1^\star} - \frac{p_1}{R - p_1 x_1^\star} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1^\star} = \frac{p_1}{R - p_1 x_1^\star}$$
$$\Leftrightarrow R - p_1 x_1^\star = p_1 x_1^\star$$
$$\Leftrightarrow R = 2p_1 x_1^\star$$
$$\Leftrightarrow x_1^\star = \frac{R}{2p_1}$$

6. On sait que :

$$\begin{aligned}
x_2 = \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \Leftrightarrow x_2^\star &= \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1^\star \\
\Leftrightarrow x_2^\star &= \frac{R}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} \frac{R}{2p_1} \\
\Leftrightarrow x_2^\star &= \frac{R}{p_2} - \frac{R}{2p_2} \\
\Leftrightarrow x_2^\star &= \frac{2R}{2p_2} - \frac{R}{2p_2} \\
\Leftrightarrow x_2^\star &= \frac{R}{2p_2}
\end{aligned}$$

La décision optimale du consommateur est le panier de biens
$E^\star = \left(x_1^\star = \dfrac{R}{2p_1} ; x_2^\star = \dfrac{R}{2p_2} \right)$.

On sait qu'on a trouvé la bonne solution parce que la décision du consommateur s'exprime en fonction des variables exogènes du problème R, p_1 et p_2.

Solution du programme du consommateur pour des préférences convexes :

Quand les préférences du consommateur sont de la forme :

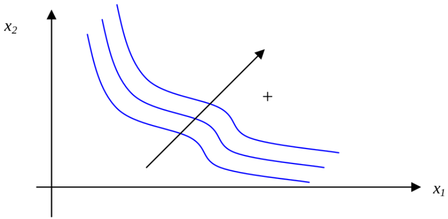
$$u(x_1; x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

avec α, $\beta \in \mathbb{R}^+$, la solution du programme du consommateur s'écrit :

$$x_1^{\star} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_1}$$
$$x_2^{\star} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_2}$$

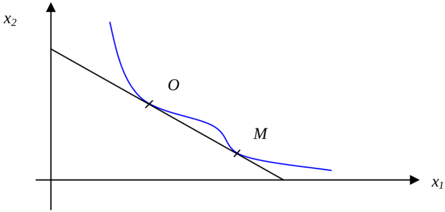
Préférences ni convexes ni concaves

Alternance de parties convexes puis concaves



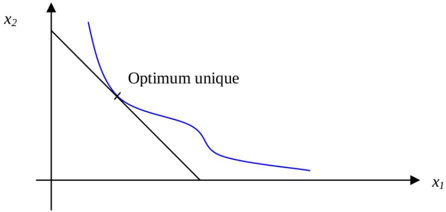
par exemple des biens pour lesquels un comportement de collectionneur se déclarerait entre certains seuils de quantités consommées.

Peut conduire à plusieurs solutions :

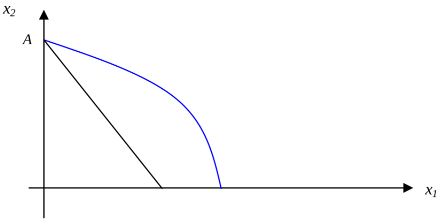


Dans ce cas, la condition d'équi-marginalité est vérifiée par les 2 paniers.

Ou alors plus probable :



Cas de préférences strictement concaves :
L'optimum du consommateur est une solution en coin.



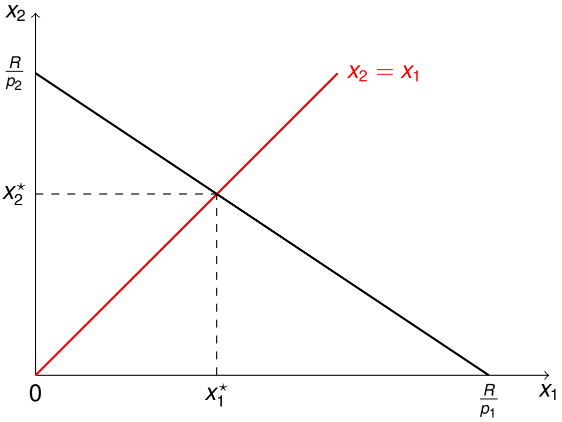
Il faut que le bien 1 soit non nécessaire ($x_1 \geqslant 0$). Sinon pas de solution.

L'optimum du consommateur : $(x_1^\star = 0\,;\, x_2^\star = \frac{R}{p_2})$.

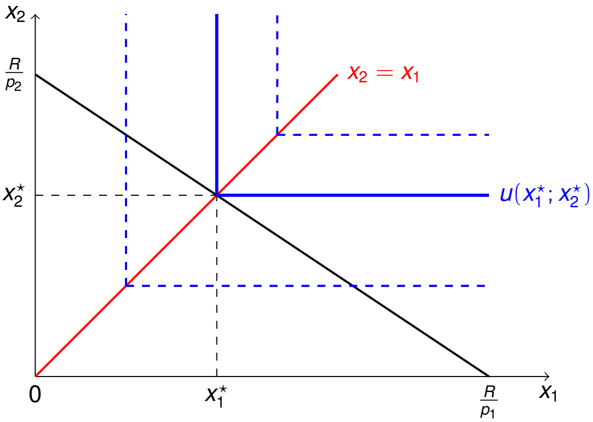
La condition d'équi-marginalité n'est pas vérifiée à l'optimum (les pentes de la droite de budget et de la tangente à la courbe d'indifférence à l'optimum ne sont pas identiques).

Comportements de type addictif : le consommateur se concentre sur un seul bien.

L'optimum est à l'intersection de la droite budgétaire et de la droite de séparation du plan (qui relie tous les coudes). Reprenons ici l'exemple du chapitre précédent) :

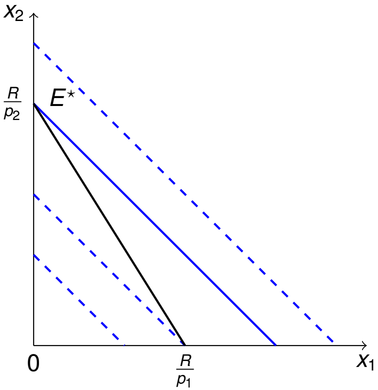


L'optimum est à l'intersection de la droite budgétaire et de la droite de séparation du plan (qui relie tous les coudes).



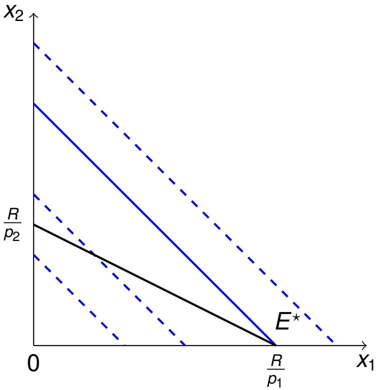
La condition d'équi-marginalité n'est pas vérifiée à l'optimum puisqu'on ne peut pas calculer la pente de la tangente à la courbe d'indifférence.

Si la contrainte budgétaire est plus pentue que les droites d'indifférence :



La décision optimale du consommateur est le panier $E^\star = \left(x_1^\star = 0; x_2^\star = \frac{R}{p_2}\right)$ si le bien 1 est non nécessaire.
Ici la condition d'équi-marginalité n'est pas vérifiée à l'optimum (les pentes de la droite de budget et de la tangente à la courbe d'indifférence à l'optimum ne sont pas identiques).

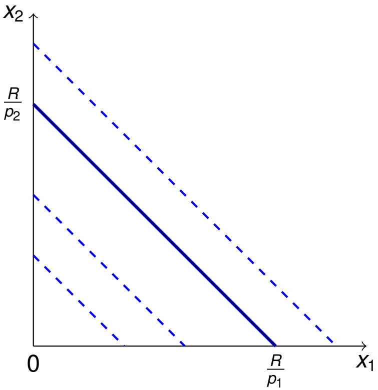
Si la contrainte budgétaire est plus plate que les droites d'indifférence :



La décision optimale du consommateur est le panier $E^\star = \left(x_1^\star = \frac{R}{p_1}; x_2^\star = 0\right)$ si le bien 2 est non nécessaire.

Ici la condition d'équi-marginalité n'est pas vérifiée à l'optimum (les pentes de la droite de budget et de la tangente à la courbe d'indifférence à l'optimum ne sont pas identiques).

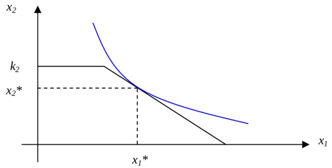
Enfin, si la contrainte budgétaire est de même pente que les droites d'indifférence :



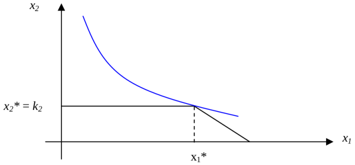
il y a une infinité de décisions optimales possibles qui se situent sur la droite de budget. La condition d'équi-marginalité est vérifiée mais ne permet pas de trouver 1 optimum unique.

Cas de la présence d'un rationnement : 2 possibilités

1. Le rationnement est faible : la solution du programme du consommateur n'est pas modifiée et la condition d'équi-marginalité est respectée :



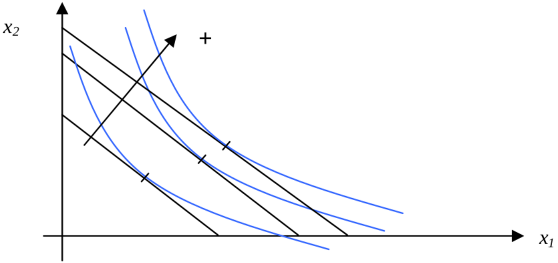
2. Le rationnement est strict : la solution est modifiée : le consommateur sature d'abord la contrainte de rationnement ($x_2^\star = k_2$), puis consacre le reste de son budget à l'autre bien ($x_1^\star = \frac{R - p_2 k_2}{p_1}$). La condition d'équi-marginalité n'est pas respectée.



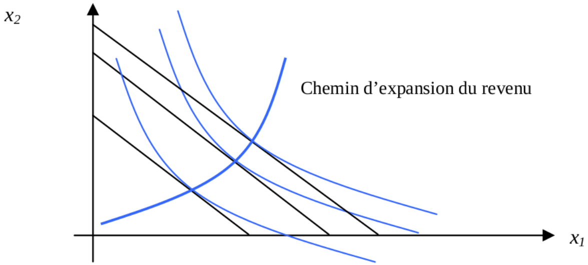
Comment le consommateur modifie-t-il son panier de consommation optimal lorsque son revenu disponible augmente ?

Un accroissement du revenu conduit à une extension de l'ensemble budgétaire et à un nouvel optimum.

Ainsi, pour plusieurs augmentations successives :

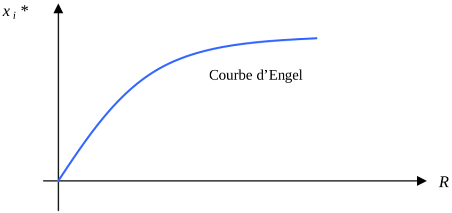


En reliant ces différents solutions, nous obtenons une courbe qui décrit la trajectoire de consommation optimale lorsque le revenu progresse. C'est le chemin d'expansion du revenu ou la courbe consommation-revenu.



Définition : Chemin d'expansion du revenu
La courbe qui, dans le repère $(0; x_1; x_2)$, décrit les paniers de biens optimaux $(x_1^\star; x_2^\star)$ pour différents niveaux du revenu R est appelée chemin d'expansion du revenu.

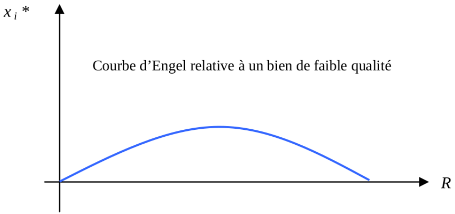
Définition : Courbe d'Engel
La consommation optimale $x_i^\star$ du bien i en fonction des différents niveaux du revenu R dans le repère $(0; R; x_i)$ est appelée courbe d'Engel.



On est ici en présence d'un **bien normal** : la demande augmente avec le revenu.

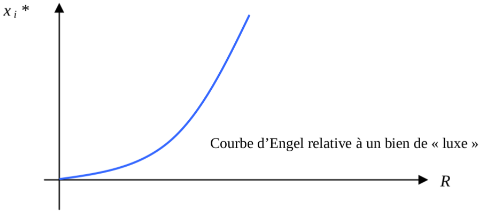
La courbe d'Engel est-elle nécessairement croissante ? Cela dépend de la nature des biens.

A la suite d'un accroissement de revenu, le consommateur décide de consommer moins d'un bien au profit d'un autre de meilleure qualité ou de niveau de gamme plus élevé.



Biens inférieurs : des biens dont la consommation baisse dès que le revenu augmente. De manière plus réaliste, il s'agirait de biens dont la consommation varie en sens inverse du revenu, à partir d'un certain seuil de revenu.

A la suite d'un accroissement de revenu, certains biens ou services voient leur consommation augmenter plus que proportionnellement avec le revenu.



Biens de luxe : des biens de qualité mais également le non vital (loisirs : culture, vacances, . . .).

Typologie

- Un bien inférieur est caractérisé par une courbe d'Engel décroissante.

- Un bien normal est caractérisé par une courbe d'Engel croissante :
    - la demande augmente moins que proportionnellement que le revenu pour un bien de nécessité ;
    - la demande augmente plus que proportionnellement que le revenu pour un bien de luxe

La manière la plus appropriée de caractériser les biens est de les classer en fonction de l'élasticité-revenu de leur demande.

Définition : Elasticité-revenu de la demande d'un bien *i*

On appelle élasticité-revenu de la demande d'un bien i, et l'on note $\varepsilon_{i,R}$ la mesure de la sensibilité de la demande de ce bien à un accroissement du revenu. On peut interpréter $\varepsilon_{i,R}$, comme le pourcentage d'augmentation (ou de baisse) de la demande en bien i induit par un accroissement de 1% du revenu.

$$\varepsilon_{i,R} = \frac{\frac{\partial x_i^d(p_1, p_2, \ldots, p_n, R)}{\partial R}}{\frac{x_i^d(p_1, p_2, \ldots, p_n, R)}{R}}$$

Typologie

- Un bien inférieur est un bien dont l'élasticité-revenu de la demande est négative.

- Un bien normal est un bien dont l'élasticité-revenu de la demande est positive :
  - un bien de nécessité est un bien dont l'élasticité est comprise entre 0 et 1
  - un bien de luxe est un bien dont l'élasticité est supérieure à 1

Exemple :

$$u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

On sait que :

$$x_1^d(p_1, p_2, R) = \frac{R}{2p_1}$$

$$x_2^d(p_1, p_2, R) = \frac{R}{2p_2}$$

$$\varepsilon_{i,R} = \frac{\frac{\partial x_i^d(p_1, p_2, R)}{\partial R}}{\frac{x_i^d(p_1, p_2, R)}{R}}$$

$$\frac{\partial x_1^d(p_1,p_2,R)}{\partial R} = \frac{\partial(\frac{R}{2p_1})}{\partial R} = \frac{1}{2p_1}\frac{\partial R}{\partial R} = \frac{1}{2p_1}$$

$$\frac{\partial x_2^d(p_1,p_2,R)}{\partial R} = \frac{\partial(\frac{R}{2p_2})}{\partial R} = \frac{1}{2p_2}\frac{\partial R}{\partial R} = \frac{1}{2p_2}$$

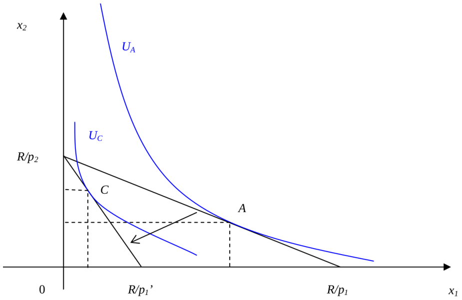
Et l'élasticité revenu :

$$\varepsilon_{1,R} = \frac{\frac{\partial x_1^d(p_1,p_2,R)}{\partial R}}{\frac{x_1^d(p_1,p_2,R)}{R}} = \frac{\frac{\frac{1}{2p_1}}{R}}{\frac{\frac{2p_1}{R}}{R}} = \frac{\frac{\frac{1}{2p_1}}{R}}{2Rp_1} = 1$$

$$\varepsilon_{2,R} = \frac{\frac{\partial x_2^d(p_1,p_2,R)}{\partial R}}{\frac{x_2^d(p_1,p_2,R)}{R}} = \frac{\frac{\frac{1}{2p_2}}{R}}{\frac{\frac{2p_2}{R}}{R}} = \frac{\frac{\frac{1}{2p_2}}{R}}{2Rp_2} = 1$$

Ici c'est une propriété de la fonction d'utilité de type Cobb-Douglas. Les variations du revenu et des demandes sont strictement proportionnelles.

Suite à l'accroissement du prix de l'un des biens (du bien 1 par exemple), l'ensemble budgétaire se contracte. Il est facile de voir comment la décision optimale de consommation se modifie :



La droite budgétaire pivote vers la gauche et on passe de l'optimum A à C.

L'augmentation du prix du bien 1 fait baisser la demande en bien 1 et fait augmenter la demande en bien 2.

Le premier effet est assez clair, le second moins.

- Pour le bien 2 :
  - effet de substitution : le bien 2 est devenu relativement moins cher : le consommateur va substituer de la consommation de bien 1 par de la consommation de bien 2.

  - effet de revenu : contraction de l'espace budgétaire : capacité d'achat générale du consommateur diminue : dégradation du pouvoir d'achat quand les prix augmentent : baisse de la consommation du bien 2.

- Pour le bien 1 : les deux effets font baisser la demande.

Pour résumer l'effet d'une hausse du prix du bien 1 :

	bien 1	bien 2
effet substitution	$-$	$+$
effet revenu	$-$	$-$
effet total	$-$	?

Définition : Effet substitution - Effet revenu

L'effet substitution est l'effet, sur la demande des biens, de la modification des prix relatifs des biens, qui conduit le consommateur à consommer moins des biens devenus relativement plus chers et plus des biens devenus relativement moins chers.

L'effet revenu est l'effet, sur la demande des biens, de la variation de pouvoir d'achat induite par la variation du revenu relatif, qui pousse le consommateur à consommer moins de chacun des biens lorsque le revenu relatif diminue, et plus de chacun des biens lorsque le revenu relatif augmente.

Comment quantifier ces deux effets ?

Il faut isoler l’un des deux effets, le neutraliser, puis le rétablir.

Neutralisation (artificielle) de l’effet revenu pour isoler l’effet substitution.

Soit un supplément de revenu imaginaire ΔR calculé pour conserver le niveau de satisfaction obtenu avant l’augmentation du prix du bien (càd $u(A)$).

Un tel supplément de revenu ΔR est appelé variation compensatrice de revenu.

Définition : Variation compensatrice de revenu

Une variation compensatrice de revenu est un supplément (ou une baisse) artificiel de revenu accordé au consommateur lui permettant de maintenir sa satisfaction au niveau initial.

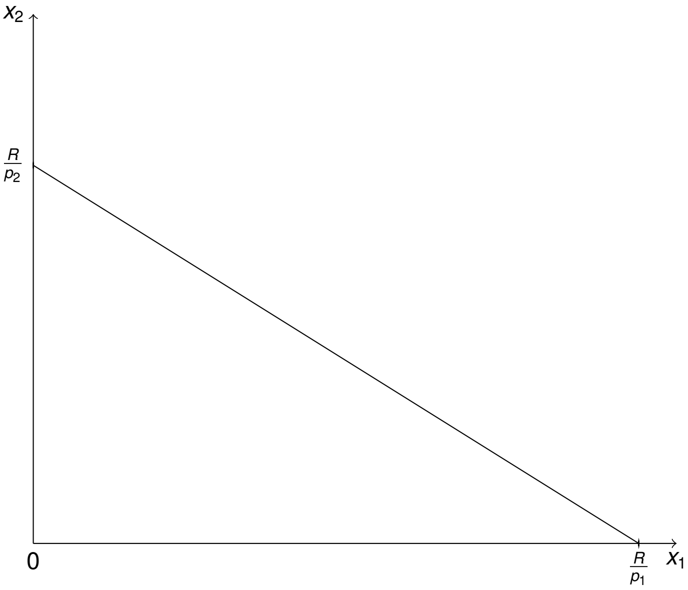
Soit une situation intermédiaire B entre le départ A et l'arrivée C telle que :

	Prix du bien 1	Prix du bien 2	Revenu
A (départ)	p_1	p_2	R
B (intermédiaire)	$p_1^{'}$	p_2	$R + \Delta R$
C (arrivée)	$p_1^{'}$	p_2	R

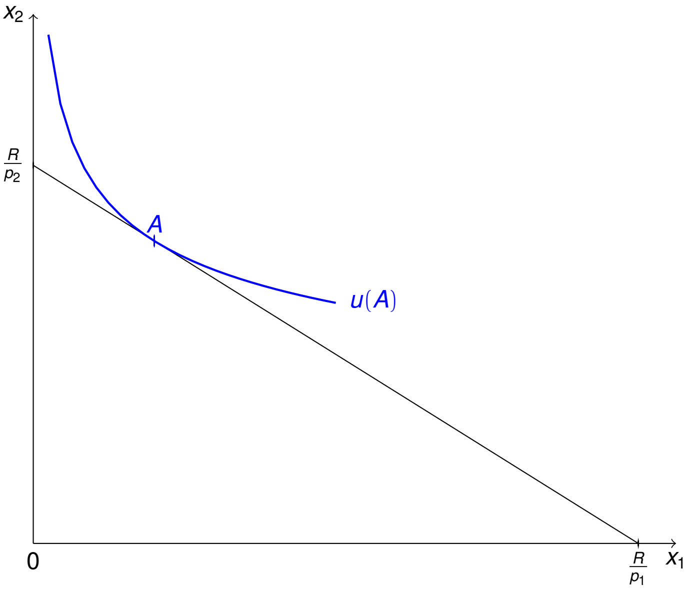
Le passage de A à B permet d'isoler l'effet de substitution (hausse de p_1) neutralisée par la hausse de revenu (ΔR).

Le passage de B à C permet d'isoler l'effet de revenu avec la baisse de revenu (ΔR).

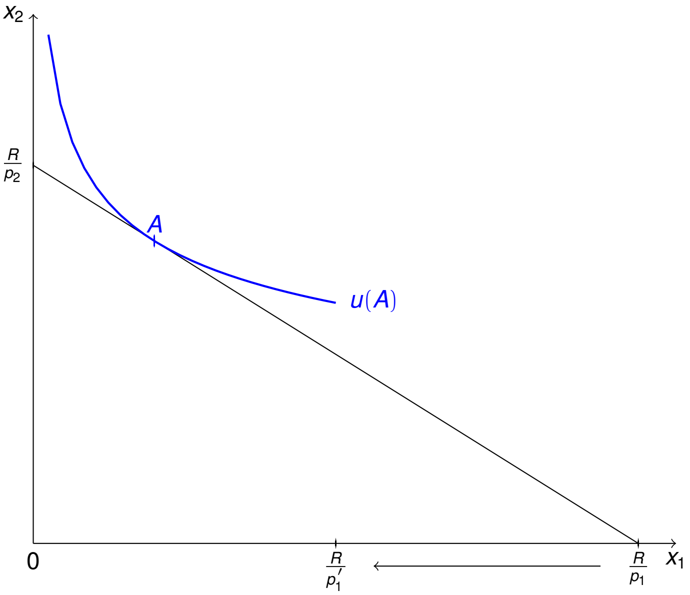
L'ensemble budgétaire de départ



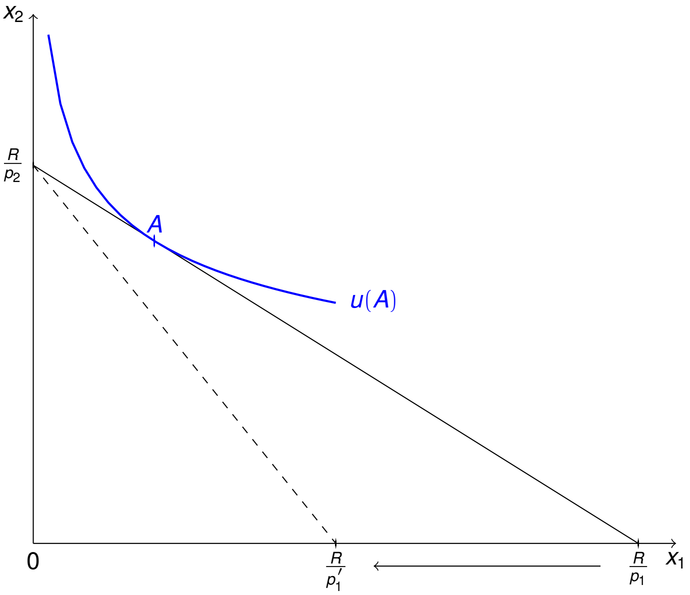
L'optimum du consommateur A



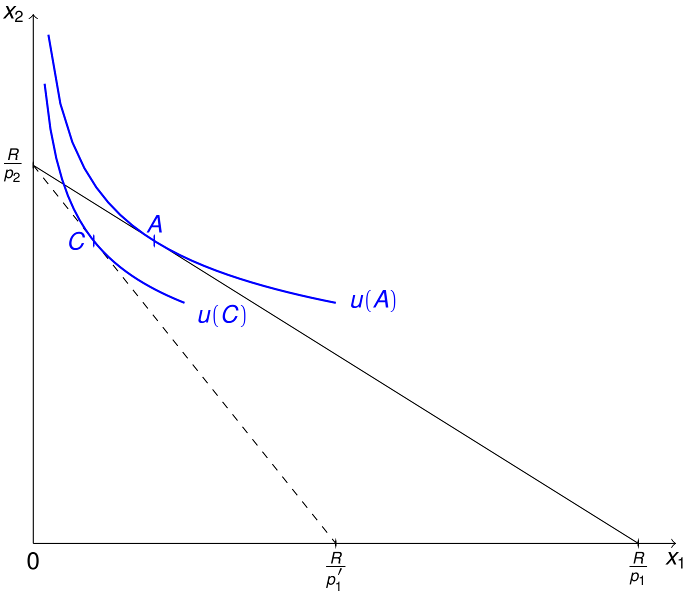
Hausse du prix : $p_1 \to p_1'$



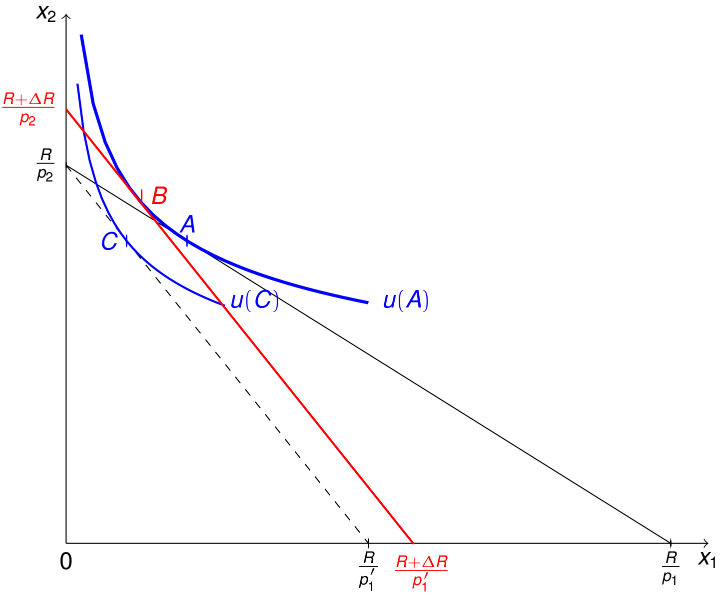
Nouvel ensemble budgétaire

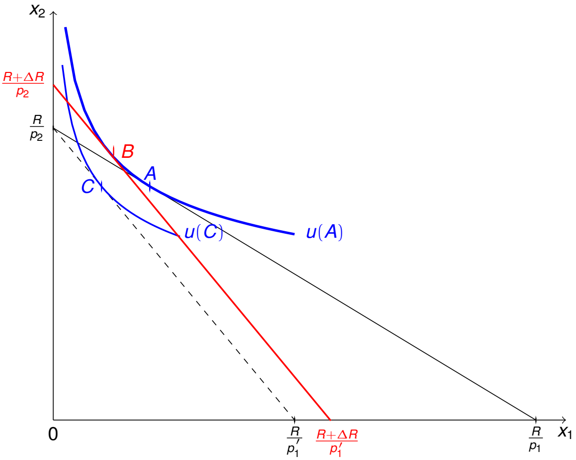


Nouvel optimum du consommateur C



Variation compensatrice de revenu : $R \rightarrow R + \Delta R$ et nouvel optimum du consommateur B tel que $u(B) = u(A)$





1. Passage de A à B : effet substitution : effet de l'accroissement de p_1 sur les demandes en biens 1 et 2, étant donné la présence d'une variation compensatrice de revenu ΔR pour maintenir la satisfaction constante.

2. Passage de B à C : effet revenu : effet de la perte de pouvoir d'achat globale liée à la perte de la variation compensatrice du revenu sur les demandes en biens 1 et 2.

	bien 1	bien 2
effet substitution	$-$	$+$
effet revenu	$-$	$-$
effet total	$-$	$\begin{cases} + \text{ si l'effet de substitution domine l'effet revenu} \\ - \text{ si l'effet de revenu domine l'effet de substitution} \\ 0 \text{ si les deux effets sont de même ampleur} \end{cases}$

	bien 1	bien 2
effet substitution	$-$	$+$
effet revenu	$-$	$-$
effet total	$-$	0

Dans le cas des Cobb-Douglas, les effets revenu et substitution se compensent parfaitement quand le prix du bien 1 augmente, ce qui laisse la quantité consommée de bien 2 inchangée.

Définition : élasticité prix-croisée de la demande d'un bien *i* relativement au prix du bien *j*

On appelle élasticité prix-croisée de la demande d'un bien *i* relativement au prix du bien *j*, et l'on note $\varepsilon_{i,j}$, la mesure de la sensibilité de la demande du bien *i* à un accroissement du prix du bien *j*. On peut interpréter $\varepsilon_{i,j}$, comme le pourcentage d'augmentation (ou de baisse) de la demande en bien *i* induit par un accroissement de 1% du prix du bien *j*.

Définition : élasticité prix-directe de la demande d'un bien *i*

On appelle élasticité prix-directe de la demande d'un bien *i* (relativement au prix du bien *i*), et l'on note $\varepsilon_{i,i}$, la mesure de la sensibilité de la demande du bien *i* à un accroissement de son prix. On peut interpréter $\varepsilon_{i,i}$, comme le pourcentage d'augmentation (ou de baisse) de la demande en bien *i* induit par un accroissement de 1% de son prix.

Les élasticités prix croisées :

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\dfrac{\partial x_1^d(p_1, p_2, R)}{\partial p_2}}{\dfrac{x_1^d(p_1, p_2, R)}{p_2}} = \frac{\dfrac{\partial \left(\dfrac{R}{2p_1}\right)}{\partial p_2}}{\dfrac{x_1^d(p_1, p_2, R)}{p_2}} = \frac{0}{\dfrac{\dfrac{R}{2p_1}}{p_2}} = 0$$

$$\varepsilon_{2,1} = \frac{\dfrac{\partial x_2^d(p_1, p_2, R)}{\partial p_1}}{\dfrac{x_2^d(p_1, p_2, R)}{p_1}} = \frac{\dfrac{\partial \left(\dfrac{R}{2p_2}\right)}{\partial p_1}}{\dfrac{x_2^d(p_1, p_2, R)}{p_1}} = \frac{0}{\dfrac{\dfrac{R}{2p_2}}{p_1}} = 0$$

Résultat : aucun effet d'une variation du prix d'un bien sur la demande d'un autre bien dans le cas d'une Cobb-Douglas. Une autre façon de dire qu'effets de substitution et de revenu se compensent parfaitement...

Les élasticités prix directes :

$$\varepsilon_{1,1} = \frac{\dfrac{\partial x_1^d(p_1,p_2,R)}{\partial p_1}}{\dfrac{x_1^d(p_1,p_2,R)}{p_1}} = \frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{R}{2p_1}\right)}{\partial p_1}}{\dfrac{x_1^d(p_1,p_2,R)}{p_1}} = \frac{\dfrac{R}{2}\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{p_1}\right)}{\partial p_1}}{\dfrac{x_1^d(p_1,p_2,R)}{p_1}} = \frac{\dfrac{-R}{2p_1^2}}{\dfrac{\frac{R}{2p_1}}{p_1}} = -\frac{\dfrac{R}{2p_1^2}}{\dfrac{R}{2p_1^2}}$$

$$= -1$$

$$\varepsilon_{2,2} = \frac{\dfrac{\partial x_2^d(p_1,p_2,R)}{\partial p_2}}{\dfrac{x_2^d(p_1,p_2,R)}{p_2}} = \frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{R}{2p_2}\right)}{\partial p_2}}{\dfrac{x_2^d(p_1,p_2,R)}{p_2}} = \frac{\dfrac{R}{2}\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{p_2}\right)}{\partial p_2}}{\dfrac{x_2^d(p_1,p_2,R)}{p_2}} = \frac{\dfrac{-R}{2p_2^2}}{\dfrac{\frac{R}{2p_2}}{p_2}} = -\frac{\dfrac{R}{2p_2^2}}{\dfrac{R}{2p_2^2}}$$

$$= -1$$

Traduit le fait que quand le prix d'un bien augmente, sa demande diminue en proportion...

Se peut-il que la demande d'un bien croisse quand son prix augmente ?

- Biens Giffen : pénurie alimentaire en Irlande, que les individus consommaient de plus en plus de pommes de terre alors que le prix desdites pommes de terre augmentait. Nécessité absolue de se procurer des aliments riches en calories pour survivre !

- Biens "obligatoires" : couverture assurantielle ou assurance.

- Biens ostentatoires ou biens de Veblen

Typologie :

- Un bien **ordinaire** est un bien dont l'élasticité prix-directe est négative
- Un bien de Giffen est un bien dont l'élasticité prix-directe est positive

Définition : Fonction d'utilité indirecte

On appelle fonction d'utilité indirecte, notée $v(p_1; p_2; \ldots; p_n; R)$ la fonction qui mesure la satisfaction maximale éprouvée par le consommateur étant donné un vecteur particulier de prix et un niveau de revenu particulier. On l'obtient en substituant, dans la fonction d'utilité initiale, les demandes de chacun des biens par leur valeur à l'optimum.

Exemple :

$$u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

On sait que :

$$x_1^d(p_1, p_2, R) = \frac{R}{2p_1}$$
$$x_2^d(p_1, p_2, R) = \frac{R}{2p_2}$$

$$\begin{aligned}
v(p_1, p_2, R) &= u(x_1^d(p_1, p_2, R), x_2^d(p_1, p_2, R)) \\
&= [x_1^d(p_1, p_2, R)]^{1/2} \times [x_2^d(p_1, p_2, R)]^{1/2} \\
&= \left(\frac{R}{2p_1}\right)^{1/2} \left(\frac{R}{2p_2}\right)^{1/2} \\
&= \frac{R}{2\sqrt{p_1 p_2}}
\end{aligned}$$

Utiliser la fonction d'utilité indirecte pour déterminer la valeur de la variation compensatrice de revenu lors de la hausse de prix de p_1 en $p_1^{'}$.

Partie 1 : le consommateur

Chapitre 3 : Travail et loisir, horizon temporel

F. Karamé
(frederic.karame@univ-lemans.fr)

Année universitaire 2023-2024

Dans le chapitre 2, nous avons analysé l'arbitrage d'un individu entre différents biens, étant donné son revenu et le prix des biens.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à deux autres formes d'arbitrage :

1. L'arbitrage Consommation-Loisir ou intra-temporel
2. L'arbitrage intertemporel de consommation

Intérêt : on sait déjà beaucoup de choses ! Pour trouver les solutions, il faut utiliser le chapitre précédent et adapter les notations.

Comment l'individu détermine-t-il son offre de travail/son choix de loisir et sa consommation de biens ?

- D'un côté, s'il augmente son offre de travail (s'il travaille davantage), l'individu pourra augmenter son revenu et consommer plus, ce qui accroît sa satisfaction.
- D'un autre côté, cela réduit mécaniquement son temps de loisir, ce qui réduit sa satisfaction.

$\Rightarrow$ Arbitrage entre consommation et loisir

On supposera que la consommation de l'individu se résume à choisir la quantité de "bien composite" qu'il souhaite acquérir.

Ce bien composite est une synthèse de l'ensemble des biens et services que l'individu pourrait consommer.

Définition : Bien composite

On appelle "bien composite" un bien virtuel dont la quantité consommée incarnerait les quantités consommées des différents biens et services demandés par le consommateur.

Le loisir correspond au temps non-consacré au travail.

Ce "bien" loisir englobe toutes les activités de loisir au sens usuel (sport, lecture, etc...) mais également tous les moments non utilisés pour l'activité salariée (sommeil, tâches ménagères, etc...).

On supposera que le consommateur arbitre entre deux biens :

1. Le bien composite
2. Le "bien" loisir

$\Rightarrow$ Permettra de raisonner dans un cadre quasi-identique à celui du chapitre précédent.

Nous avons vu que la décision optimale de l'individu dépend de son revenu et des prix des différents biens.

Supposons que le prix unitaire du bien composite (exogène) est *p*.

Mais quel est le prix du "bien" loisir ?

Et le revenu n'est plus exogène ici...

La dotation totale en temps est notée ℓ_0. On supposera, par exemple, que $\ell_0 = 24$ heures ou $\ell_0 = 7$ jours, ou $\ell_0 = 1$ mois...

Sur cette période de temps donnée, l'individu va travailler pendant une durée ℓ, avec $\ell \leqslant \ell_0$.

Son loisir sera donc le temps non travaillé $\ell_0 - \ell$.

Soit w le taux de salaire exogène. Le revenu salarial de l'individu sur cette période sera $w \times \ell$.

Ce revenu salarial peut être complété par un revenu non salarial exogène noté R. Les ressources totales de l'individu sont donc égales à $w\ell + R$

Si le prix unitaire du bien composite est p et la quantité de bien composite consommée est c, la dépense totale de consommation de l'individu est égale à $p \times c$.

Réécrivons la contrainte budgétaire :

$$\text{Dépenses} \leqslant \text{Ressources}$$

$$pc \leqslant w\ell + R$$

En ajoutant $w\ell_0$ à gauche et à droite, on obtient :

$$pc + w\ell_0 \leqslant w\ell + R + w\ell_0$$
$$\Leftrightarrow pc + w\underbrace{(\ell_0 - \ell)}_{\text{loisir}} \leqslant R + w\ell_0$$

$$pc \leqslant w\ell + R$$

$$\underbrace{pc}_{\text{Décaissement physique}} + \underbrace{w(\ell_0 - \ell)}_{\text{Décaissement virtuel}} \leqslant \underbrace{w\ell_0}_{\text{Encaissement virtuel}} + \underbrace{R}_{\text{Encaissement physique}}$$

- $w\ell_0$: **comme si** l'agent était payé pour tout le temps disponible ℓ_0...
- et rachetait les heures de loisirs $\ell_0 - \ell$ qu'il veut "consommer".
- $w(\ell_0 - \ell)$ mesure la dépense d'acquisition du "bien" loisir

$\Rightarrow$ Nous faisons apparaître ici le **prix implicite** du "bien" loisir. Dans le terme de gauche, la quantité consommée de bien loisir est valorisée au prix w. Ce prix du loisir correspond à que l'on appelle un **coût d'opportunité**.

Définition : Coût d'opportunité

On appelle "coût d'opportunité" d'un bien ou service le prix de la renonciation à la jouissance de ce bien ou service. En d'autres termes, c'est le coût du bien évalué en termes d'opportunités non concrétisées.

Ici, tout se passe **comme si** l'individu "achetait" du "bien loisir" au prix w.

A chaque fois que l'individu décide d'avoir une heure de loisir supplémentaire, il doit travailler une heure de moins et doit renoncer à une heure de salaire.

Nous souhaitons représenter les préférences de l'individu et sa contrainte budgétaire dans le repère $(0, c, (\ell_0 - \ell))$ (dans le chapitre précédent $(0, x_1, x_2)$).

On note $u[c; (\ell_0 - \ell)]$ la fonction d'utilité de l'individu qui croît avec la quantité consommée de bien composite d'une part, et avec la quantité consommée de loisir d'autre part.

La contrainte budgétaire est donnée par :

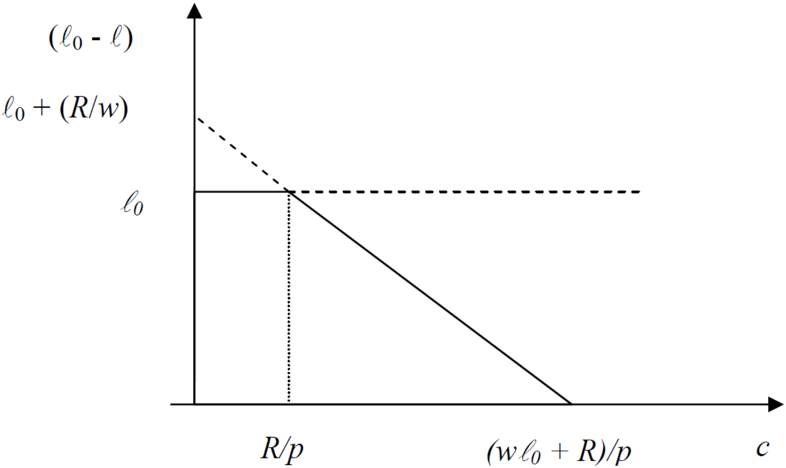
$$pc + w(\ell_0 - \ell) \leqslant w\ell_0 + R$$

(dans le chapitre précédent : $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant R$)

- $\Rightarrow$ Abscisse à l'origine : $\dfrac{w\ell_0 + R}{p}$
- $\Rightarrow$ Ordonnée à l'origine : $\dfrac{w\ell_0 + R}{w} = \ell_0 + \dfrac{R}{w}$
- $\Rightarrow$ Pente : $-\dfrac{p}{w}$

  Contrainte supplémentaire : le loisir est rationné ! ! La quantité consommée de loisir ne peut pas dépasser la dotation totale en temps (je ne peux pas consommer plus de 24h de loisir par jour) : $(\ell_0 - \ell) \leqslant \ell_0$

La contrainte budgétaire du consommateur-travailleur : graphiquement



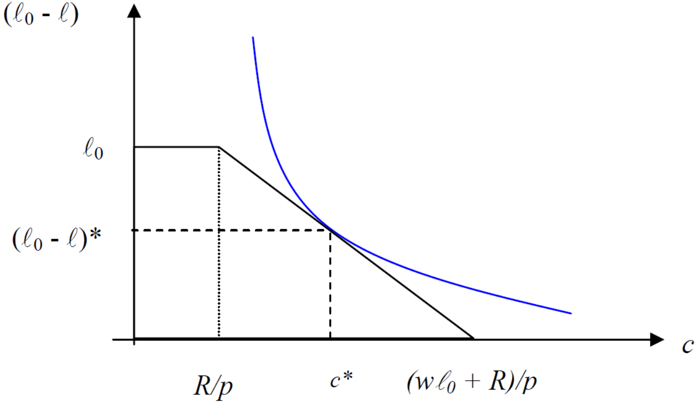
Comme dans le chapitre précédent, pour trouver la décision optimale du consommateur, on doit chercher la plus haute courbe d'indifférence compatible avec l'ensemble budgétaire.

On distingue alors deux configurations, selon le revenu non salarial R :

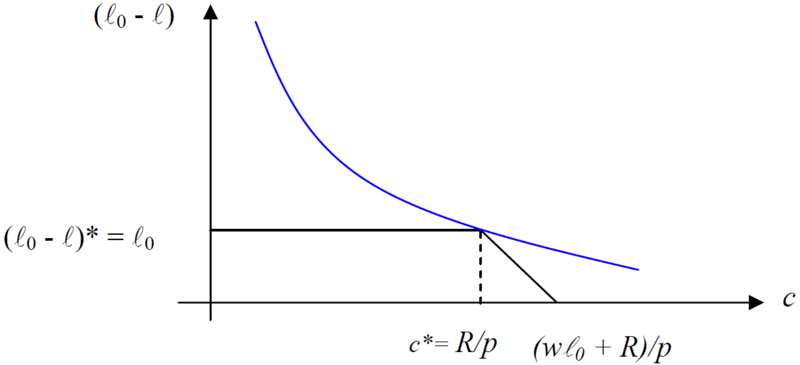
- Soit le revenu non salarial R est faible, auquel cas le consommateur ne bute pas sur le désir de consommer une quantité de loisir supérieure à ℓ_0. L'individu travaille un certain nombre d'heures. A l'optimum, la courbe d'indifférence est tangente à la contrainte budgétaire.

- Soit le revenu non salarial R est très élevé, auquel cas le consommateur bute sur la contrainte l'empêchant de consommer une quantité de loisir supérieure à ℓ_0. L'individu consacre tout son temps disponible au loisir et ne travaille pas.

$\Rightarrow$ si le revenu non salarial R est faible, le consommateur ne bute pas sur le désir de consommer une quantité de loisir supérieure à ℓ_0. L'individu travaille un certain nombre d'heures. A l'optimum, la courbe d'indifférence est tangente à la contrainte budgétaire.



$\Rightarrow$ si le revenu non salarial R est très élevé, le consommateur bute sur la contrainte l'empêchant de consommer une quantité de loisir supérieure à ℓ_0. L'individu consacre tout son temps disponible au loisir et ne travaille pas.



Le programme du consommateur-travailleur :

$$\max_{c;(\ell_0-\ell)} u[c;(\ell_0-\ell)]$$
$$sc : pc + w(\ell_0-\ell) \leqslant w\ell_0 + R$$
$$(\ell_0-\ell) \leqslant \ell_0$$

- En raison de l'axiome de non-saturation, la première contrainte (contrainte de budget) sera nécessairement saturée.
- En revanche, la seconde contrainte (contrainte de dotation totale en temps) ne sera pas nécessairement saturée. On distinguera alors 2 cas.

1er cas : la seconde contrainte (de dotation totale en temps) n'est pas saturée.

$\Rightarrow$ **A l'optimum**, la courbe d'indifférence est tangente à la contrainte budgétaire. La décision optimale $[c^\star; (\ell_0 - \ell)^\star]$ est telle que

$$TmS_{(\ell_0-\ell),c} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial(\ell_0-\ell)}}{\dfrac{\partial u}{\partial c}} = -\frac{w}{p}$$

(attention TmS écrit ici dans le sens contraire pour faire apparaître le salaire réel w/p) ou

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial(\ell_0-\ell)}}{w} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial c}}{p}$$

ou encore

$$\frac{Um_{(\ell_0-\ell)}}{w} = \frac{Um_c}{p}$$

$\frac{Um_{(\ell_0-\ell)}}{w} = \frac{Um_c}{p}$ représente la condition équi-marginale

$\Rightarrow$ A l'optimum, le surcroît de satisfaction par euro dépensé obtenu grâce à la dernière unité consommée de bien loisir doit être égal au surcroît de satisfaction par euro dépensé obtenu grâce à la dernière unité consommée de bien composite.

2d cas : la seconde contrainte (de dotation totale en temps) est saturée.

$\Rightarrow$ La condition équi-marginale n'est pas vérifiée. La décision optimale est telle que

$$(\ell_0 - \ell)^\star = \ell_0$$

$$c^\star = R/p$$

Application : $u[c; (\ell_0 - \ell)] = c^{1/2} \times (\ell_0 - \ell)^{1/2}$

Le prix unitaire du bien composite est p. Le taux de salaire est w. On suppose que le revenu non salarial est nul ($R = 0$). On suppose que la première contrainte (contrainte de budget) est saturée, et que la seconde contrainte (de dotation totale en temps) n'est pas saturée (cette solution est impossible puisque $R = 0$, cela impliquerait $c^\star = 0$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de bien nécessaire).

Etape 1 : On écrit le programme du consommateur

$$\max_{c;(\ell_0-\ell)} u[c;(\ell_0-\ell)] = c^{1/2} \times (\ell_0-\ell)^{1/2}$$
$$sc : pc + w(\ell_0-\ell) \leqslant w\ell_0$$

Comme on a appris son cours, on sait tout de suite que :

$$c^\star = \frac{1}{2}\frac{w\ell_0}{p}$$
$$(\ell_0-\ell)^\star = \frac{1}{2}\frac{w\ell_0}{w} = \frac{1}{2}\ell_0$$

Etape 2 (facultative) : Pour simplifier les calculs, on peut raisonner sur une transformation croissante de la fonction d'utilité

Dans cet exemple, on peut remarquer que :

$$v = 2 \ln u = 2 \ln[c^{1/2} \times (\ell_0 - \ell)^{1/2}] = \ln c + \ln(\ell_0 - \ell)$$

Etape 3 : On utilise la contrainte budgétaire saturée pour exprimer une variable en fonction de l'autre

Par hypothèse, la contrainte budgétaire est saturée, donc :

$$pc + w(\ell_0 - \ell) = w\ell_0 \Leftrightarrow pc = w\ell \Leftrightarrow \ell = \frac{pc}{w}$$

Etape 4 : On remplace dans la fonction objectif

$$\max_c \ \{\ln c + \ln(\ell_0 - pc/w)\}$$

ou

$$\max_c \ \left\{\ln c + \ln\left(\frac{w\ell_0 - pc}{w}\right)\right\}$$

ou encore

$$\max_c \ \{\ln c + \ln(w\ell_0 - pc) - \ln(w)\}$$

Etape 5 : On écrit la condition du premier ordre (CPO)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial c}|_{c=c^\star} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{c^\star} - \frac{p}{w\ell_0 - pc^\star} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{c^\star} &= \frac{p}{w\ell_0 - pc^\star} \\
\Leftrightarrow w\ell_0 - pc^\star &= pc^\star \\
\Leftrightarrow w\ell_0 &= 2pc^\star \\
\Leftrightarrow c^\star &= \frac{w\ell_0}{2p}
\end{aligned}
$$

Etape 6 : On réutilise la contrainte budgétaire saturée pour calculer l'offre de travail :

$$\ell^{\star} = \frac{pc^{\star}}{w} = \frac{pw\ell_0}{w2p} = \frac{\ell_0}{2}$$

Etape 7 : On exprime la demande de loisir

$$(\ell_0 - \ell)^\star = \ell_0 - \ell^\star = \ell_0 - \frac{\ell_0}{2} = \frac{\ell_0}{2}$$

Quel est l'impact d'une hausse de *w* sur l'arbitrage Consommation-Loisir ?

- D'un côté, *w* représente le prix du loisir. Si *w* augmente, le prix du loisir augmente, ce qui incite le consommateur à consommer moins de bien loisir et plus de bien composite.

  $\Rightarrow$ **Effet substitution**

- D'un autre côté, *w* représente la rémunération du travail. Si *w* augmente, le travail devient plus rémunérateur, ce qui accroît les ressources du consommateur et l'incite à consommer plus de bien loisir et plus de bien composite.

  $\Rightarrow$ **Effet richesse** (ici le revenu augmente en absolu du fait de la hausse de salaire, pas en relatif du fait d'une hausse de prix de biens de consommation)

Définition : Effet substitution - Effet richesse

L'effet substitution est l'effet, sur la demande des biens, de la modification des prix relatifs des biens, qui conduit le consommateur à consommer moins des biens devenus relativement plus chers et plus des biens devenus relativement moins chers.

L'effet richesse est l'effet, sur la demande des biens, de la variation des ressources du consommateur, qui pousse le consommateur à consommer moins de chacun des biens lorsque ses ressources diminuent, et plus de chacun des biens lorsque ses ressources augmentent.

Pour résumer l'effet d'une hausse de *w* :

	bien composite	loisir
Effet substitution	$+$	$-$
Effet richesse	$+$	$+$
Effet total	$+$	?

L'effet total d'une hausse de w sur la demande de loisir est indéterminé. On peut envisager deux situations :

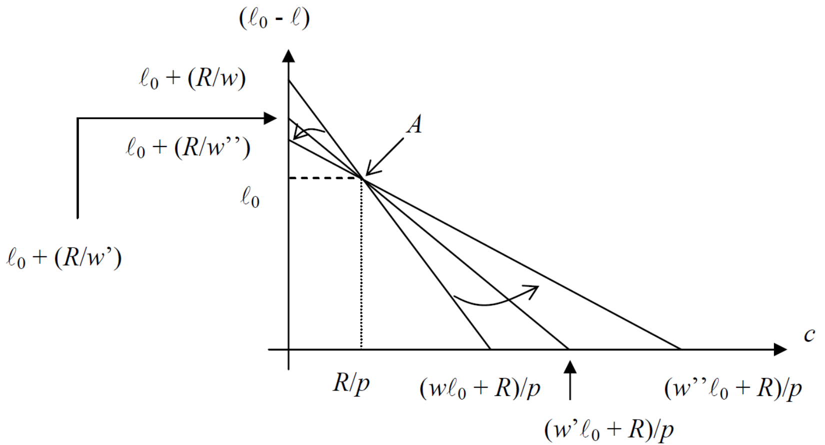
- Tout d'abord, suite à une hausse du salaire (passage de w à w', avec $w' > w$), la demande de loisir diminue.

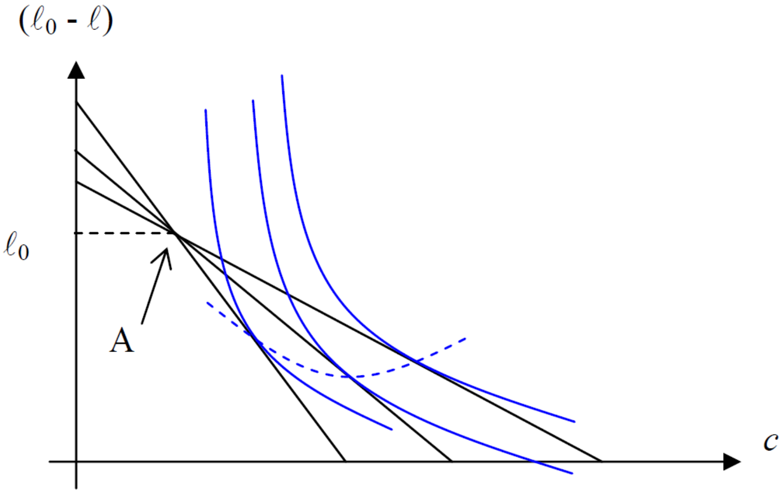
  $\Rightarrow$ L'effet substitution domine l'effet richesse

- Puis, suite à une nouvelle hausse du salaire (passage de w' à w'', avec $w'' > w'$), la demande de loisir augmente.

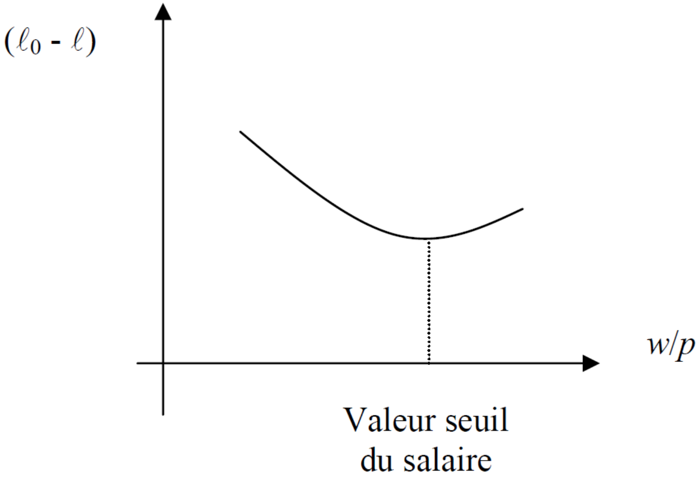
  $\Rightarrow$ L'effet richesse domine l'effet substitution

Impact d'une hausse de *w*

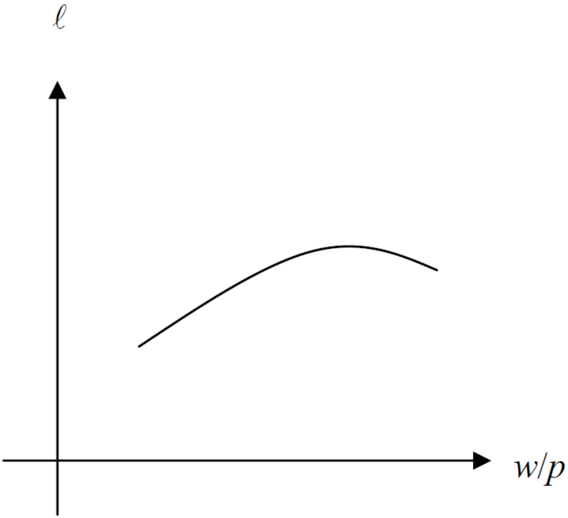




⇒ Cette figure suggère qu'il existe un seuil de salaire en dessous duquel l'effet substitution domine l'effet richesse et au dessus duquel l'effet richesse domine l'effet substitution.



$\Rightarrow$ Par conséquent, la demande de loisir $(\ell_0 - \ell)$ en fonction du salaire réel w/p peut prendre une forme en "U".



$\Rightarrow$ Et l'offre de travail salarié ℓ en fonction du salaire réel w/p peut avoir une forme en cloche, d'abord croissante puis décroissante à partir d'un certain seuil.

Comment l’individu prend ses décisions dans le temps ?

- D’un côté, un individu peut épargner aujourd’hui pour pouvoir consommer plus demain (pour financer un voyage, acheter une voiture, etc...)

- D’un autre côté, un individu peut choisir d’emprunter aujourd’hui et de rembourser demain (prêt étudiant, prêt immobilier, etc...)

$\Rightarrow$ Arbitrage intertemporel de consommation

Le point central de l’arbitrage intertemporel est le suivant : l’individu cherche à lisser sa consommation dans le temps.

$\Rightarrow$ C’est le fruit d’un comportement rationnel si les préférences du consommateur sont convexes : non seulement le consommateur a un goût pour la diversité, mais aussi un goût pour la régularité dans le temps de son train de vie.

On supposera, dans ce chapitre, qu'il n'y a pas d'incertitude. Les flux de revenus présents et futurs sont parfaitement connus.

On raisonne sur deux périodes : la période 1 et la période 2. Tous les choix sont faits en période 1.

A la période 1, l'individu a un revenu R_1 exogène. Il peut consommer un bien composite en quantité c_1 au prix p_1 exogène.

A la période 2, l'individu a un revenu R_2 exogène. Il peut consommer un bien composite en quantité c_2 au prix p_2 exogène.

En période 1, l'individu peut choisir d'emprunter ($E < 0$) ou de prêter de l'argent ($E > 0$) au taux unique r exogène (incompatible avec un système bancaire)

On suppose une fonction d'utilité **intertemporelle** $u(c_1, c_2)$ similaire au chapitre précédent. L'agent peut donc apprécier les biens présents et futurs en leur accordant le même poids. Hypothèse assez héroïque. . .

Jusqu'à présent, l'individu raisonnait sur 1 période et ne pouvait pas épargner ou emprunter de l'argent. La contrainte budgétaire s'écrivait :

$$p_1 c_1 \leqslant R_1$$

Désormais, l'individu raisonne sur 2 périodes et peut épargner ou prêter de l'argent. On écrit maintenant :

$$E = R_1 - p_1 c_1$$

Si E est positif, l'individu épargne de l'argent.

Si E est négatif, l'individu emprunte de l'argent.

Si $E = 0$, l'individu vit sur ses revenus à chaque période, sans épargner ni emprunter.

En période 2, en plus de son revenu R_2, le consommateur dispose de son épargne composée du capital (E) et des intérêts ($E \times r$). Le montant total de l'épargne (ou de l'emprunt) est donc égal à $(1 + r)E$.

Soit on lui rembourse ce qu'il a prêté, soit il rembourse ce qu'il a emprunté.

La contrainte budgétaire de seconde période s'écrit :

$$p_2 c_2 \leqslant R_2 + (1 + r)E$$

En utilisant la définition de l'épargne, on peut réécrire :

$$p_2 c_2 \leqslant R_2 + (1 + r)(R_1 - p_1 c_1)$$

ou encore

$$p_1 c_1 (1 + r) + p_2 c_2 \leqslant R_1 (1 + r) + R_2$$

$$p_1 c_1 (1 + r) + p_2 c_2 \leqslant R_1 (1 + r) + R_2$$

$\Rightarrow$ C'est la contrainte budgétaire intertemporelle exprimée en *valeur future*.

En multipliant les deux membres de l'inéquation par $\frac{1}{1+r}$, on peut la réécrire :

$$p_1 c_1 + \frac{p_2 c_2}{1 + r} \leqslant R_1 + \frac{R_2}{1 + r}$$

$\Rightarrow$ C'est la contrainte budgétaire intertemporelle exprimée en *valeur présente*.

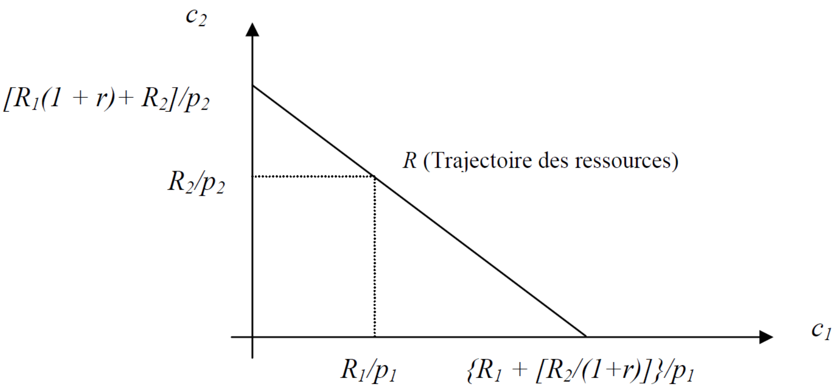
$\Rightarrow$ $\frac{1}{1+r}$ est le facteur d'actualisation : convertit les valeurs futures en valeurs présentes.

Nous souhaitons représenter cette contrainte dans le plan $(0, c_1, c_2)$. Pour cela, il faut isoler c_2.

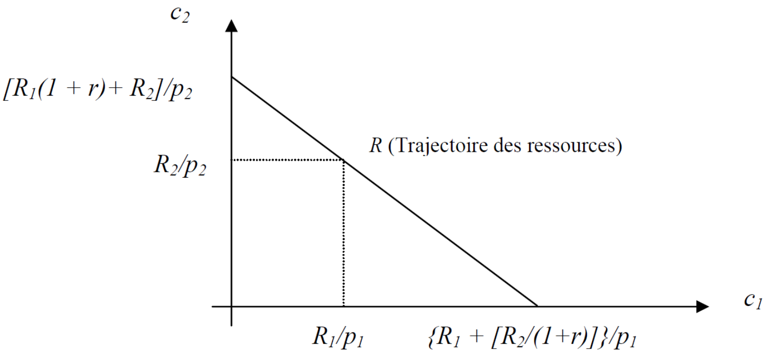
$$p_1 c_1(1+r) + p_2 c_2 \leqslant R_1(1+r) + R_2 \Leftrightarrow c_2 \leqslant \frac{R_1(1+r)+R_2}{p_2} - \frac{p_1(1+r)}{p_2} c_1$$

La droite de budget intertemporelle a pour équation :

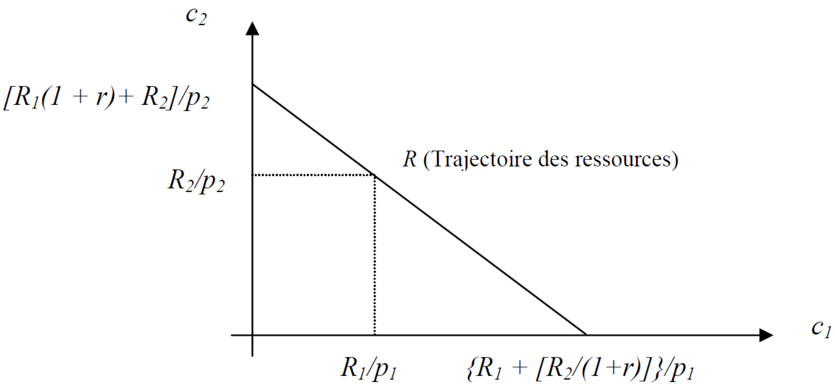
$$c_2 = \frac{R_1(1+r)+R_2}{p_2} - \frac{p_1(1+r)}{p_2} c_1$$



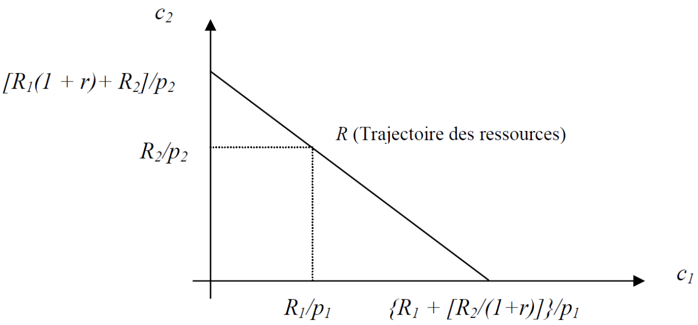
$\Rightarrow$ Sur ce graphique, chaque couple (c_1, c_2) représente une trajectoire de consommation.



Remarque 1 : La droite du budget intertemporelle passe par le point des dotations initiales ou trajectoire des ressources *R*.



Remarque 2 : En abscisse, le niveau de consommation de première période est mesuré en valeur présente. En ordonnée, le niveau de consommation de seconde période est mesuré en valeur future.



Remarque 3 : La pente de la droite est égale à $-\dfrac{p_1(1+r)}{p_2}$. En posant le taux d'inflation $\pi = \dfrac{p_2 - p_1}{p_1}$, il vient que $p_2 = (1+\pi)p_1$. On en déduit donc que la pente est égale à $-\dfrac{1+r}{1+\pi} = -(1+r^\star)$, avec $r^\star$ le taux d'intérêt réel (le nominal r déflaté de l'inflation π).

Comme dans le chapitre précédent, pour trouver la décision optimale du consommateur, on doit chercher la plus haute courbe d'indifférence compatible avec l'ensemble budgétaire.

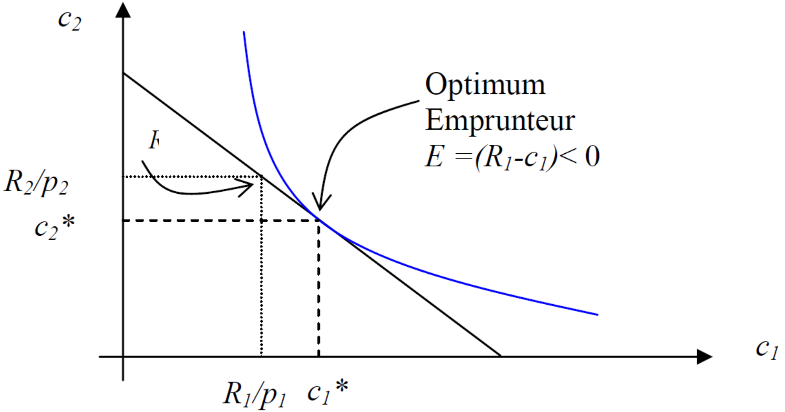
On distingue alors deux configurations :

- Soit la décision optimale conduit le consommateur à consommer plus en première période que ses ressources courantes (et donc moins en seconde période que ses ressources courantes).

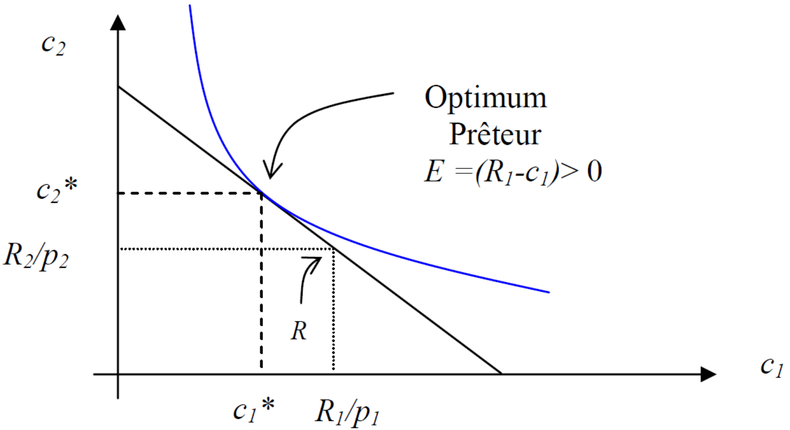
  $\Rightarrow$ Optimum emprunteur

- Soit la décision optimale conduit le consommateur à consommer moins en première période que ses ressources courantes (et donc plus en seconde période que ses ressources courantes).

  $\Rightarrow$ Optimum prêteur



c_2
R_2/p_2
c_2*
Optimum
Emprunteur
$E=(R_1-c_1)<0$
c_1
R_1/p_1
c_1*



c_2
Optimum
Prêteur
$E = (R_1 - c_1) > 0$
c_2^*
R_2/p_2
R
c_1
c_1^*
R_1/p_1

Le programme du consommateur :

$$\max_{c_1;c_2} u(c_1, c_2)$$

$$sc : p_1 c_1 (1 + r) + p_2 c_2 \leqslant R_1 (1 + r) + R_2$$

La contrainte de budget intertemporelle sera nécessairement saturée. A l'optimum, la courbe d'indifférence est tangente à la contrainte budgétaire.

A l'optimum, la courbe d'indifférence est tangente à la contrainte budgétaire. La décision optimale $(c_1^\star; c_2^\star)$ est telle que

$$TmS_{c_1,c_2} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial c_1}}{\frac{\partial u}{\partial c_2}} = -(1+r)\frac{p_1}{p_2}$$

ou

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial c_1}}{(1+r)p_1} = \frac{\frac{\partial u}{\partial c_2}}{p_2}$$

ou encore

$$\frac{Um_{c_1}}{(1+r)p_1} = \frac{Um_{c_2}}{p_2}$$

$\frac{Um_{c_1}}{(1+r)p_1} = \frac{Um_{c_2}}{p_2}$ représente la condition équi-marginale

$\Rightarrow$ A l'optimum, le surcroît de satisfaction par euro dépensé obtenu grâce à la dernière unité consommée de bien aujourd'hui (exprimé en valeur présente) doit être égal au surcroît de satisfaction par euro dépensé obtenu grâce à la dernière unité consommée de bien demain (exprimé en valeur future).

Exemple : $u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} \times c_2^{1-\alpha}$

Le prix unitaire du bien composite en première période est p_1. Le prix unitaire du bien composite en seconde période est p_2. On suppose que $p_1 = p_2 = 1$. Le revenu de l'individu en première période est R_1. Le revenu de l'individu en seconde période est R_2.

Etape 1 : On écrit le programme du consommateur

$$\max_{c_1;c_2} u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} \times c_2^{1-\alpha}$$
$$sc : c_1(1+r) + c_2 \leqslant R_1(1+r) + R_2$$

Comme on a appris son cours, on sait tout de suite que :

$$c_1^{\star} = \alpha \left(\frac{R_1(1+r) + R_2}{1+r} \right) = \alpha \left(R_1 + \frac{R_2}{1+r} \right)$$
$$c_2^{\star} = (1-\alpha)\left(R_1(1+r) + R_2\right)$$

Etape 2 (facultative) : Pour simplifier les calculs, on peut raisonner sur une transformation croissante de la fonction d'utilité

Dans cet exemple, on peut remarquer que :

$$v = \ln u = \ln(c_1^{\alpha} c_2^{1-\alpha}) = \alpha \ln c_1 + (1-\alpha) \ln c_2$$

Etape 3 : On utilise la contrainte budgétaire saturée pour exprimer une variable en fonction de l'autre

Par hypothèse, la contrainte budgétaire est saturée, donc :

$$c_1(1+r)+c_2 \leqslant R(1+r)+R_2 \Leftrightarrow c_2 = R_1(1+r)+R_2-c_1(1+r)$$

Etape 4 : On remplace dans la fonction objectif

$$\max_{c_1} \alpha \ln c_1 + (1-\alpha)\ln[R_1(1+r) + R_2 - c_1(1+r)]$$

Etape 5 : On écrit la condition du premier ordre (CPO)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial c_1}\Big|_{c_1=c_1^\star} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\alpha}{c_1^\star} - \frac{(1+r)(1-\alpha)}{R_1(1+r)+R_2-(1+r)c_1^\star} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\alpha}{c_1^\star} &= \frac{(1+r)(1-\alpha)}{R_1(1+r)+R_2-(1+r)c_1^\star} \\
\Leftrightarrow \alpha[R_1(1+r)+R_2] - \alpha(1+r)c_1^\star &= (1-\alpha)(1+r)c_1^\star \\
\Leftrightarrow \alpha[R_1(1+r)+R_2] &= (1+r)c_1^\star \\
\Leftrightarrow c_1^\star &= \alpha\left[R_1 + \frac{R_2}{(1+r)}\right]
\end{aligned}
$$

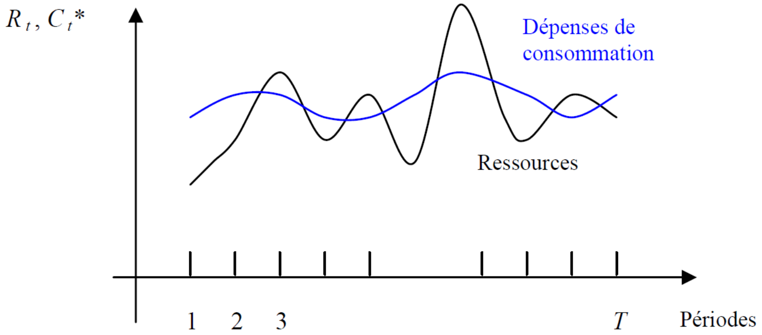
Etape 6 : On réutilise la contrainte budgétaire saturée

$$\begin{aligned}
c_2^\star &= R_1(1+r) + R_2 - c_1^\star(1+r) \\
&= R_1(1+r) + R_2 - \alpha\left[R_1 + \frac{R_2}{(1+r)}\right](1+r) \\
&= (1-\alpha)[R_1(1+r) + R_2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^\star &= R_1 - c_1^\star \\
&= R_1 - \alpha\left[R_1 + \frac{R_2}{(1+r)}\right] \\
&= (1-\alpha)R_1 - \alpha\frac{R_2}{(1+r)}
\end{aligned}$$

On remarque qu'avec des préférences convexes, la décision optimale du consommateur consiste à choisir une trajectoire de consommation plus lisse.

- Si le revenu est plus beaucoup élevé en période 2 qu'en période 1, il est optimal d'emprunter de l'argent en période 1 pour lisser sa trajectoire de consommation.
- Si le revenu est beaucoup plus élevé en période 1 qu'en période 2, il est optimal d'épargner de l'argent en période 1 pour lisser sa trajectoire de consommation.



Si l'on illustre la chronique de la consommation et des ressources sur T périodes, on remarque que la trajectoire optimale de consommation est plus lisse que la chronique des ressources.

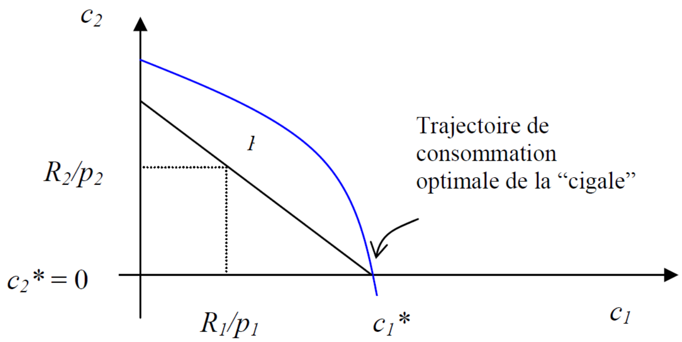
La convexité des préférences du consommateur traduit le goût pour la régularité dans le temps du train de vie.

Que se passerait-il si un consommateur avait des préférences strictement concaves ?

Exemple 1 : La "cigale" consomme tout pendant l'été (période 1) et n'a plus rien pour l'hiver (période 2).

Exemple 2 : La "fourmi" accumule tout pendant l'été (période 1) et consomme tout en hiver (période 2).

La décision optimale du consommateur en cas de préférences convexes



Partie 2 : le producteur

Chapitre 4 : La combinaison optimale des facteurs de production

F. Karamé
(frederic.karame@univ-lemans.fr)

Année universitaire 2023-2024

Quels sont les déterminants de l'offre ?

Modélisation et caractérisation du processus de production

Hypothèse : caractéristiques des biens parfaitement définies et en parfaite adéquation avec les attentes des consommateurs.

Hypothèse forte car nécessite des études de marchés préalables, des études de faisabilités, la mise en place du processus de production, la production et la livraison. Tout cela prend du temps et peut arriver trop tard.

Ici on se limitera à **comment produire**...

- output ou produit Q
- inputs ou facteurs de production : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ supposés homogènes
  - Capital K : lui-même un output, fixe ou variable
  - Travail L.
- Technologie de production $Q = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\Rightarrow$ Organisation optimale pour atteindre une cible de production ?
$\Rightarrow$ Choix des inputs pour une cible de production à moindre coût ?

Première tâche : modéliser comment produire un output (ou produit) Q avec des inputs (ou facteurs de production) : $x_1, x_2, \ldots, x_n$: il faut définir une technologie.

Technologie de production

Une technologie de production est un processus de transformation basé sur la combinaison de multiples facteurs de productions (nommés inputs) et conduisant à l'élaboration, la confection, la réalisation d'un bien ou service (nommé output).

Les inputs sont des éléments de natures très différentes.

Il peut s'agir d'hectares de terre, de tonnes de matières premières, de kilowatts d'énergie, d'heures de travail, de temps d'utilisation de machines, de prestations de nettoyage, de consulting, d'intermédiation financière, de couverture assurancielle...

Parmi tous ces inputs, il en est un que les économistes ont pris l'habitude de désigner par le terme capital.

Capital
En microéconomie, le capital désigne des inputs qui sont eux mêmes des biens produits. En d'autres termes, ces inputs sont des biens déjà issus d'un processus de transformation.

- Machines (capital fixe) ou biens d'équipement (capital variable)
- Distinction parfois difficile : penser à la durabilité
- Ne pas confondre capital physique et capital financier càd emprunts !
- Ne pas inclure le capital humain, càd l'ensemble des compétences et aptitudes d'un offreur de travail.

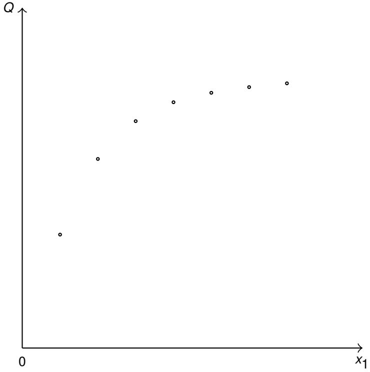
Ici : facteur capital supposé homogène.

- Regroupant des éléments de natures et de qualités très variées.
- Distinction entre les travailleurs qualifiés et les travailleurs non qualifiés, ou, mieux encore, une distribution continue des travailleurs selon leur niveau de qualification.
- Mais réalité plus complexe : certaines prestations sont uniquement intellectuelles, d'autres allient les talents du corps et de l'esprit, d'autres encore sont la simple et fastidieuse répétition de tâches identiques.
- Le travail en équipe est supposé engendrer des phénomènes vertueux que la seule mesure individuelle des talents ne permet pas de détecter.
- Enfin, des contraintes institutionnelles fortes et nombreuses font du facteur travail un input très complexe, multidimensionnel, d'une disponibilité et d'une flexibilité imparfaites.

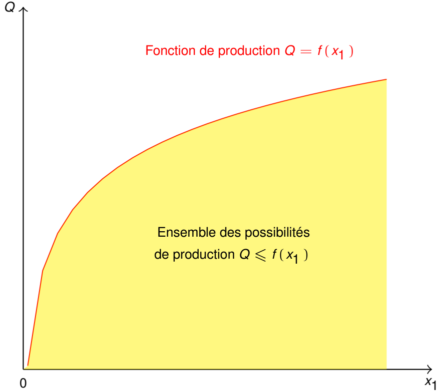
Ici : facteur travail supposé homogène.

la technologie de production est le processus par lequel, en combinant un ou plusieurs inputs, on aboutit à la production d'un certain nombre d'unités d'output.

Exemple : le nombre de kilogrammes de mûres cueillies en fonction du nombre d'heures consacrées à la récolte par un cueilleur. Nous choisissons de désigner par Q le nombre de kilogrammes de mûres sauvages cueillies et par x_1 le nombre d'heures de travail consacrées à la cueillette.



l'ébauche d'une courbe qui représente la relation fonctionnelle entre nombre d'heures de travail (input) utilisées et nombre de kilogrammes de mûres (output) cueillies.



Dans le cas général à n inputs : la fonction de production est $Q = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ et $Q \leqslant f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ est l'ensemble des possibilités de production

Fonction de production

On appelle fonction de production d'un output produit en quantité Q à partir de n inputs utilisés en quantités x_1 ,x_2 , ..., x_n la relation fonctionnelle qui décrit la quantité maximale d'output qu'il est possible de produire à partir de la combinaison de ces inputs. On note cette fonction de production : $Q = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$.

L'inégalité $Q \leqslant f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ délimite l'ensemble des possibilités de production, c'est-à- dire l'ensemble des combinaisons d'inputs permettant d'atteindre une certaine cible de production Q sans que la combinaison utilisée ne soit nécessairement la plus adaptée ou la plus efficace.

Seule une combinaison réalisant l'égalité $Q = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ sera, du point de vue de la firme, pleinement satisfaisante.

Caractérisation de la fonction de production :

- Quel est l'impact sur la quantité totale produite de l'utilisation d'une quantité supplémentaire d'un input particulier (isolément) ? Productivité marginale d'un facteur : décroissantes, constantes ou croissantes ?
- Quel sera l'impact sur la quantité totale produite d'une augmentation de la quantité utilisée de tous les inputs dans les mêmes proportions ? Rendements d'échelle : croissants, décroissants ou constants ?

Productivité marginale d'un facteur i

Soit $f(x_1; x_2; ...; x_n)$ une fonction de production. La productivité marginale du facteur i, notée P_{mi} est le surcroît de production induit par un accroissement infinitésimal de la quantité utilisée du facteur i :

$$P_{mi}(x_1; x_2; ...; x_n) = \frac{\partial f(x_1; x_2; ...; x_n)}{\partial x_i}$$

On calcule...

- $P_{mi} = \frac{\partial f(x_1; x_2; ...; x_n)}{\partial x_i}$ pour savoir si la production augmente ou diminue avec x_i
- $\frac{\partial P_{mi}}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x_1; x_2; ...; x_n)}{\partial x_i^2}$ pour savoir si la productivité marginale de i est croissante ou décroissante

Rendements d'échelle

Soit $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ une fonction de production. Les rendements d'échelle de cette fonction de production sont croissants (respectivement décroissants, constants) si le surcroît de production induit par un accroissement, de même ampleur, de tous les facteurs simultanément, est plus que proportionnel (respectivement moins que proportionnel, proportionnel).

Pour $\lambda > 1$, on compare $f(\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n)$ et $\lambda f(x_1; x_2; \dots; x_n)$:

Cas	Rendements d'échelles
$f(\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n) > \lambda f(x_1; x_2; \dots; x_n)$	croissants
$f(\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n) = \lambda f(x_1; x_2; \dots; x_n)$	constants
$f(\lambda x_1; \lambda x_2; \dots; \lambda x_n) < \lambda f(x_1; x_2; \dots; x_n)$	décroissants

Exemple : $Q = f(k;\ell) = k^{1/2}\ell^{2/3}$

$$\begin{aligned}
P_{m,k} &= \frac{\partial f(k;\ell)}{\partial k} = \frac{\partial(k^{1/2}\ell^{2/3})}{\partial k} = \ell^{2/3}\frac{\partial(k^{1/2})}{\partial k} \\
&= \ell^{2/3}\frac{1}{2}k^{-1/2} = \frac{1}{2}\ell^{2/3}k^{-1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{m,\ell} &= \frac{\partial f(k;\ell)}{\partial \ell} = \frac{\partial(k^{1/2}\ell^{2/3})}{\partial \ell} = k^{1/2}\frac{\partial(\ell^{2/3})}{\partial \ell} \\
&= k^{1/2}\frac{2}{3}\ell^{-1/3} = \frac{2}{3}k^{1/2}\ell^{-1/3}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f(k;\ell)}{\partial k^2} = \frac{\partial P_{m,k}}{\partial k} = \frac{\partial(\frac{1}{2}\ell^{2/3}k^{-1/2})}{\partial k} = \frac{1}{2}\ell^{2/3}\frac{\partial(k^{-1/2})}{\partial k}$$
$$= \frac{1}{2}\ell^{2/3}\frac{-1}{2}k^{-3/2} = -\frac{1}{4}\ell^{2/3}k^{-3/2} < 0$$
$$\frac{\partial^2 f(k;\ell)}{\partial \ell^2} = \frac{\partial P_{m,\ell}}{\partial \ell} = \frac{\partial(\frac{2}{3}k^{1/2}\ell^{-1/3})}{\partial \ell} = \frac{2}{3}k^{1/2}\frac{\partial(\ell^{-1/3})}{\partial \ell}$$
$$= \frac{2}{3}k^{1/2}\frac{-1}{3}\ell^{-4/3} = -\frac{2}{9}k^{1/2}\ell^{-4/3} < 0$$

La fonction de production est croissante en ses facteurs.

Les productivités marginales des facteurs capital et travail sont toutes deux décroissantes.

Exemple : $Q = f(k;\ell) = k^{1/2}\ell^{2/3}$

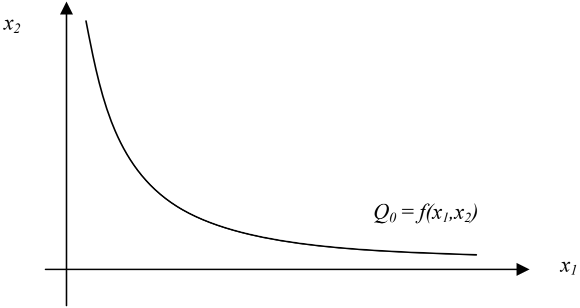
$$\begin{aligned} f(\lambda k;\lambda\ell) &= (\lambda k)^{1/2}(\lambda\ell)^{2/3} \\ &= \lambda^{1/2}k^{1/2}\lambda^{2/3}\ell^{2/3} \\ &= \lambda^{(1/2+2/3)}k^{1/2}\ell^{2/3} \\ &= \lambda^{7/6}f(k;\ell) \\ &> \lambda f(k;\ell) \end{aligned}$$

puisque $\lambda^{7/6} > \lambda$ puisque $\lambda > 1$.

Les rendements d'échelle sont donc croissants ici.

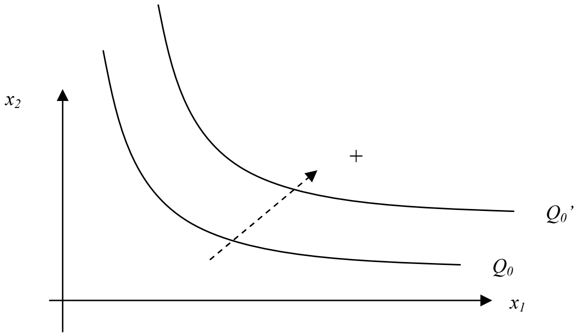
Isoquant

Soit $Q = f(x_1; x_2)$ une fonction de production. Un isoquant est l'ensemble des combinaisons d'inputs $(x_1; x_2)$ qui permettent de produire la même quantité Q_0. L'isoquant pour la cible de production Q_0 est donc l'ensemble des $(x_1; x_2)$ tels que $f(x_1; x_2) = Q_0$

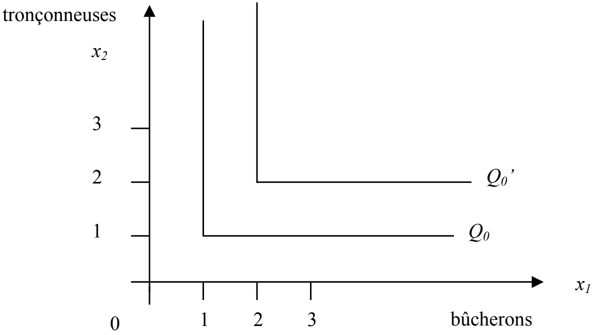


Isoquant pour un niveau de production Q_0

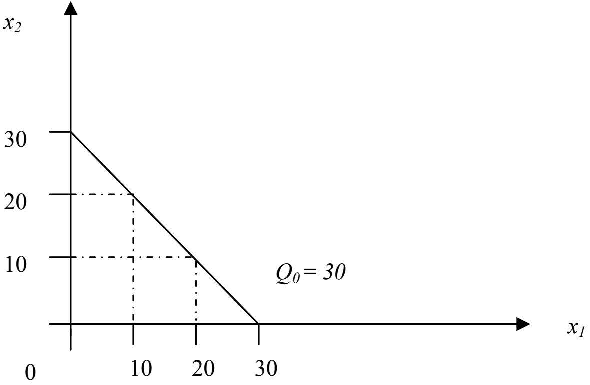
Bizarre si c'est pour le gâteau au chocolat !



La quantité produite est d'autant plus grande que l'isoquant est situé vers le haut et la droite



de la forme $Q = \min\{ax_1 + b; cx_2 + d\}$

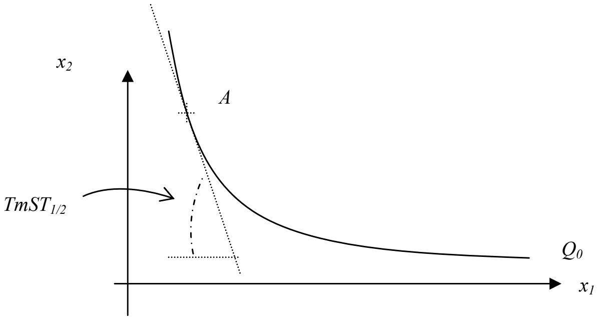


de la forme $Q = x_1 + x_2$

Taux marginal de Substitution Technique entre 2 facteurs de production (ou TmST)

Le $TmST_{i,j}$ entre les facteurs i et j est une mesure des proportions dans lesquelles il est possible de substituer l'input i par un autre (j) sans que la quantité d'output produite ne soit modifiée :

$$TmST_{i,j} = \frac{dx_j}{dx_i}$$



D’un point de vue graphique, c’est la pente de la tangente à l’isoquant au point A.

Propriété

$$TmST_{i,j}(x_1; \ldots; x_n) = -\frac{P_{mi}(x_1; \ldots; x_n)}{P_{mj}(x_1; \ldots; x_n)}$$

Facile à retrouver avec la différentielle totale de la fonction de production.

Prix unitaires des facteurs donnés : w_i pour le facteur i

Le producteur choisit les quantités $x_1, \ldots, x_n$ qui minimisent le coût de production $w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n$ permettant de produire au moins la cible de production Q_0 :

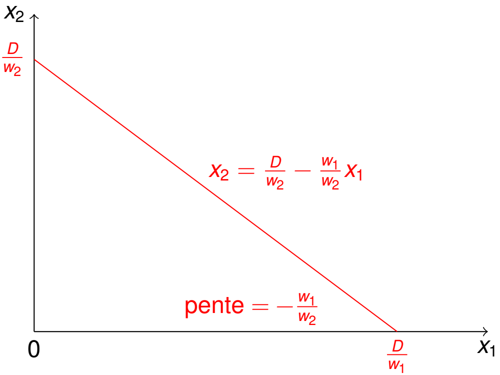
$$\min_{x_1, \ldots, x_n} w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n$$
$$sc \quad Q_0 \leqslant f(x_1, \ldots, x_n)$$

Appelons $D = w_1 x_1 + w_2 x_2$ la valeur de la dépense.

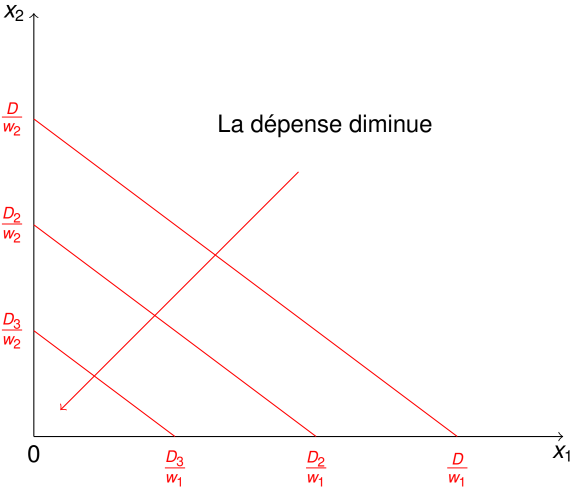
Sa représentation dans l'espace des facteurs $(0, x_1, x_2)$ est une droite :

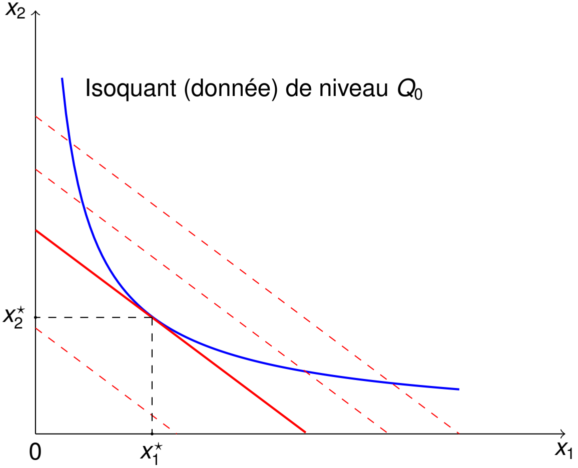
$$x_2 = \frac{D}{w_2} - \frac{w_1}{w_2} x_1$$

Représente toutes les combinaisons de facteurs permettant de dépenser le montant D : droite d'isocoûts



Droites d'isocoûts de pente $-\frac{w_1}{w_2}$ pour $D > D_2 > D_3$





Caractérisation de l'optimum $(x_1^\star, x_2^\star)$ du producteur : la droite d'isocoût tangente l'isoquante de niveau Q_0

Caractérisation de la décision optimale du producteur (1)

La décision optimale du producteur est une combinaison de facteurs $(x_1^\star, x_2^\star)$ telle que le Taux marginal de Substitution Technique entre les inputs soit égal au rapport de leurs prix, encore appelé prix relatif (du facteur 1 relativement au facteur 2).

$$TmST_{1,2}(x_1^\star, x_2^\star) = -\frac{w_1}{w_2}$$

$$
\begin{aligned}
& TmST_{1,2}(x_1^\star, x_2^\star) = -\frac{w_1}{w_2} \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{P_{m1}(x_1^\star, x_2^\star)}{P_{m2}(x_1^\star, x_2^\star)} = -\frac{w_1}{w_2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{P_{m1}(x_1^\star, x_2^\star)}{P_{m2}(x_1^\star, x_2^\star)} = \frac{w_1}{w_2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{P_{m1}(x_1^\star, x_2^\star)}{w_1} = \frac{P_{m2}(x_1^\star, x_2^\star)}{w_2}
\end{aligned}
$$

Condition d'équi-marginalité technique

Caractérisation de la décision optimale du producteur (2)

La décision optimale du producteur est une combinaison de facteurs $(x_1^\star, x_2^\star)$ telle que le surcroît de production, par euro dépensé, obtenu grâce à la dernière unité de facteur 1 utilisé soit égal au surcroît de production, par euro dépensé, obtenu grâce à la dernière unité de facteur 2 utilisé.

$$\frac{P_{m1}(x_1^\star, x_2^\star)}{w_1} = \frac{P_{m2}(x_1^\star, x_2^\star)}{w_2}$$

Résolution du programme de minimisation sous contrainte si $n = 2$

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$sc \;\; Q_0 \leqslant f(x_1, x_2)$$

1. On utilise $Q_0 = f(x_1, x_2)$ pour exprimer x_2 en fonction de x_1 $(x_2 = \Phi(x_1))$
2. On remplace x_2 par $\Phi(x_1)$ dans la fonction de dépense $w_1 x_1 + w_2 x_2$ pour se ramener à un problème de minimisation à une variable x_1 sans contrainte
3. On résoud la CPO $\frac{\partial(w_1 x_1 + w_2 \Phi(x_1))}{\partial x_1}|_{x_1 = x_1^\star} = 0$ pour trouver $x_1^\star$
4. On déduit $x_2^\star = \Phi(x_1^\star)$

$\Rightarrow$ On a donc $x_1^\star(w_1; w_2; Q_0)$ et $x_2^\star(w_1; w_2; Q_0)$, les fonctions de demande de facteurs à l'optimum technique.

Résolution du programme de minimisation sous contrainte si $n = 2$

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$

$$sc \;\; Q_0 \leqslant f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$$

Saturons la fonction de production et isolons x_2 :

$$\begin{aligned} Q_0 = f(x_1, x_2) &\Leftrightarrow Q_0 = x_1^{1/2} x_2^{1/2} \\ &\Leftrightarrow x_2^{1/2} = \frac{Q_0}{x_1^{1/2}} \\ &\Leftrightarrow x_2 = \frac{Q_0^2}{x_1} (\equiv \Phi(x_1)) \end{aligned}$$

Réinjectons l'expression de x_2 dans la droite d'isocoût. Elle devient :

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 = w_1 x_1 + w_2 \frac{Q_0^2}{x_1}$$

qui est une fonction à une variable à minimiser (par rapport à x_1) sans contrainte.

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un minimum en $x^\star$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x^\star) \leqslant f(x)$$

Théorème (Conditions nécessaires d'optimalité) : si f admet un minimum en $x^\star$, alors

$$\text{CPO} : f'(x)|_{x=x^\star} = 0$$
$$\text{CSO} : f''(x)|_{x=x^\star} \geqslant 0$$

Conditions nécessaires mais non suffisantes.

Conditions nécessaires et suffisantes : si f est convexe, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un maximum en $x^\star$ ssi :

$$\text{CPO} : f'(x)|_{x=x^\star} = 0$$
$$\text{CSO} : f''(x)|_{x=x^\star} > 0$$

Calculons la dérivée partielle :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(w_1 x_1 + w_2 \frac{Q_0^2}{x_1})}{\partial x_1} &= \frac{\partial(w_1 x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(w_2 \frac{Q_0^2}{x_1})}{\partial x_1} \\
&= w_1 \frac{\partial(x_1)}{\partial x_1} + w_2 Q_0^2 \frac{\partial(\frac{1}{x_1})}{\partial x_1} \\
&= w_1 + w_2 Q_0^2 \frac{-1}{x_1^2}
\end{aligned}$$

Posons la CPO :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(.)}{\partial x_1}|_{x_1=x_1^\star} = 0 &\Leftrightarrow w_1 - w_2 Q_0^2 \frac{1}{x_1^{\star 2}} = 0 \\
&\Leftrightarrow w_2 Q_0^2 \frac{1}{x_1^{\star 2}} = w_1 \\
&\Leftrightarrow x_1^{\star 2} = Q_0^2 \frac{w_2}{w_1} \\
&\Leftrightarrow x_1^\star = Q_0 \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

On en déduit $x_2^\star$:

$$\begin{aligned} x_2^\star &= \frac{Q_0^2}{x_1^\star} \\ &= \frac{Q_0^2}{Q_0\left(\dfrac{w_2}{w_1}\right)^{1/2}} \\ &= Q_0\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

On en déduit la dépense associée à l'optimum

$$\begin{aligned} D^\star &= w_1 x_1^\star + w_2 x_2^\star \\ &= w_1 Q_0 \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^{1/2} + w_2 Q_0 \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^{1/2} \\ &= w_1^{1/2} Q_0 w_2^{1/2} + w_2^{1/2} Q_0 w_1^{1/2} \\ &= 2 w_1^{1/2} w_2^{1/2} Q_0 \end{aligned}$$

Résolution du programme technique :

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$
$$sc \quad Q_0 \leqslant f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$\begin{aligned}
x_1^{\star} &= Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \\
x_2^{\star} &= Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \\
D^{\star} &= w_1 x_1^{\star} + w_2 x_2^{\star} \\
&= Q_0^{\frac{1}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right)
\end{aligned}$$

pas raisonnable de penser que, pour une période de production donnée, tous les déterminants du coût sont des éléments variables. En effet, la production nécessite l'utilisation de facteurs présents en quantité fixe, quel que soit le nombre d'unités finalement produites.

- Les coûts d'acquisition (principal et intérêts) du capital (fixe et variable), de maintenance, ...
- coûts en amont : recherche & développement (R&D) (par exemple, dans l'industrie pharmaceutique), marketing, ...
- le facteur travail : quel que soit le volume d'activité (même réduite), les salaires des responsables et des personnels des services industriel, commercial, administratif et financier, RH, import-export, approvisionnement, logistique, achats, ... seront à supporter + le cadre institutionnel qui peut rendre les licenciements très onéreux.
- les parties forfaitaires de certaines dépenses comme les abonnements à la fourniture de fluides dont le montant est indépendant des quantités consommées.

Fonction de coût variable $CV(Q)$

$$\begin{aligned} CV(Q) &= D^\star(w_1; \ldots; w_n; Q) \\ &= w_1 x_1^\star(w_1; \ldots; w_n; Q) + \ldots + w_n x_n^\star(w_1; \ldots; w_n; Q) \end{aligned}$$

Fonction de coût total $C(Q)$

$$\begin{aligned} C(Q) &= CV(Q) + F \\ &= w_1 x_1^\star(w_1; \ldots; w_n; Q) + \ldots + w_n x_n^\star(w_1; \ldots; w_n; Q) + F \end{aligned}$$

Permet de construire 2 outils d’analyse pour la suite...

Fonction de coût moyen $C_M(Q)$

ou prix de revient d'une unité produite

$$\begin{aligned} C_M(Q) &= \frac{C(Q)}{Q} \\ &= \frac{CV(Q)}{Q} + \frac{F}{Q} \\ &= CV_M(Q) + \frac{F}{Q} \end{aligned}$$

Dépend notamment de F et du coût variable moyen

Quand $Q \to \infty$, $C_M(Q) \to CV_M(Q)$

Fonction de coût marginal $C_m(Q)$

ou surcroît de coût engendré par une augmentation infinitésimale de la production

$$C_m(Q) = \frac{\partial C(Q)}{\partial Q}$$

Ne dépend pas du tout de F

- constant : dans le cas de la production à la chaîne
- croissant : mettre en culture des terres de moins en moins fertiles ou faciles à exploiter
- variable : croissant pendant l'apprentissage (learning by doing), puis constant avec l'expérience, puis croissant avec la fatigue...

Relation entre coût moyen et coût marginal

La fonction de coût marginal coupe la courbe de coût moyen en son minimum.

$$C'_M(Q) = \left(\frac{C(Q)}{Q}\right)' = \frac{C'(Q)Q - C(Q)}{Q^2} = \frac{C_m(Q)Q - C(Q)}{Q^2}$$

Soit $Q^\star$ le minimum du $C_M(Q)$. On a donc $C'_M(Q^\star) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} C_m(Q^\star)Q^\star - C(Q^\star) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad C_m(Q^\star) = \frac{C(Q^\star)}{Q^\star} \\ &\Leftrightarrow \quad C_m(Q^\star) = C_M(Q^\star) \end{aligned}$$

Exemple : $C(Q) = \frac{1}{3}Q^2 + 27$

$$C_M(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{\frac{1}{3}Q^2 + 27}{Q} = \frac{1}{3}Q + \frac{27}{Q}$$

$$C_m(Q) = \frac{\partial C(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial(\frac{1}{3}Q^2 + 27)}{\partial Q} = \frac{1}{3}\frac{\partial(Q^2)}{\partial Q} = \frac{2}{3}Q$$

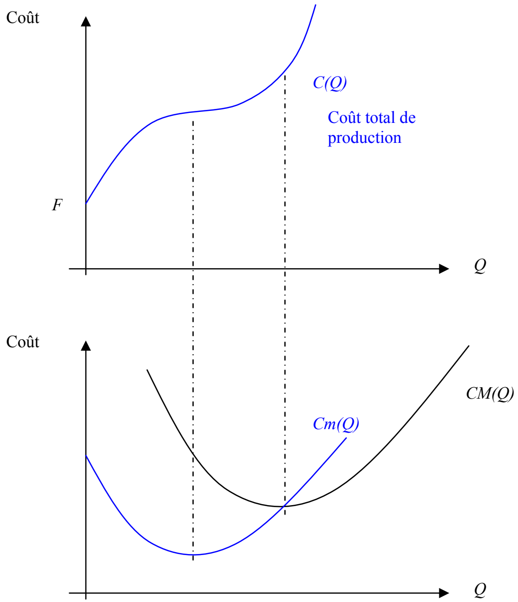
Trouvons le minimum de la fonction de C_M :

$$\frac{\partial C_M(Q)}{\partial Q} = \frac{\partial(\frac{1}{3}Q + \frac{27}{Q})}{\partial Q} = \frac{1}{3} - \frac{27}{Q^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_M(Q)}{\partial Q}|_{Q=Q^\star} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{27}{Q^{\star 2}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{27}{Q^{\star 2}} \\
&\Leftrightarrow Q^{\star 2} = 3 \times 27 = 3 \times 3^3 = 3^4 \\
&\Leftrightarrow Q^\star = 3^2 = 9
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que $C_m(9) = C_M(9) = 6$.

Exemple



Partie 2 : le producteur

Chapitre 5 : L'offre de la firme en contexte de concurrence pure et parfaite

F. Karamé
(frederic.karame@univ-lemans.fr)

Année universitaire 2023-2024

Dans ce chapitre

- Cadre de référence de la concurrence pure et parfaite (CPP)

- On a vu au chapitre précédent comment les producteurs décident de produire

- Comment les producteurs décident-ils de la quantité à produire ? En maximisant leur profit

- Attention, on parle ici de profit microéconomique !

Hypothèses de la concurrence pure et parfaite

Un marché de concurrence pure et parfaite est un secteur de production d'un bien ou service pour lequel une multitude de firmes de très petite taille (hypothèse d'atomicité) produit un bien identique (hypothèse d'homogénéité du bien produit). Les firmes peuvent entrer et sortir librement de ce marché, sans coûts irrécupérables (hypothèse de libre entrée). Chaque firme est si petite qu'elle n'a aucune capacité à influer sur le prix auquel le bien ou service sera vendu sur le marché : le prix de marché s'impose à elle (hypothèse de firme preneuse de prix, « price taker »).

- Fonction de profit $\Pi(Q)$
  $$\Pi(Q) = \underbrace{RT(Q)}_{\text{Recette totale}} - \underbrace{C(Q)}_{\text{Coût total}} = pQ - C(Q)$$

- Dans le chapitre précédent, choix des inputs pour minimiser le coût de production de Q

- Ici, choix de Q pour maximiser le profit

- NB : En CPP, le producteur ne peut pas choisir le prix ! ! !

$\Rightarrow$ On cherche Q qui maximise le profit

$$\max_{Q} \Pi(Q) = RT(Q) - C(Q)$$

Résolution formelle de

$$\max_{Q} \Pi(Q) = RT(Q) - C(Q)$$

$$\begin{aligned} \Pi'(Q)|_{Q=Q^\star} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad RT'(Q^\star) - C'(Q^\star) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad R_m(Q^\star) = C_m(Q^\star) \end{aligned}$$

La quantité $Q^\star$ qui maximise le profit est celle pour laquelle la recette marginale est égale au coût marginal.

Recette marginale

La recette marginale notée $R_m(Q)$ est le surcroît de recette lié à la vente d'une unité supplémentaire de produit

En CPP, $R_m(Q) = (pQ)' = p$ indépendante de Q

$\Rightarrow$ En CPP, la quantité $Q^\star$ qui maximise le profit est celle pour laquelle

$$C_m(Q^\star) = p$$

Si $R_m(Q) > C_m(Q)$

- La dernière unité produite rapporte plus qu'elle ne coûte

$\Rightarrow$ le profit augmenterait en produisant plus $\Rightarrow$ il faut produire plus

Si $R_m(Q) < C_m(Q)$

- La dernière unité produite rapporte moins qu'elle ne coûte

$\Rightarrow$ le profit augmenterait en produisant moins $\Rightarrow$ il faut produire moins

$\Rightarrow$ Il est optimal de produire Q tel que $R_m(Q) = C_m(Q)$

$C_m(Q) = p$ permet de déterminer la quantité Q qui sera produite en fonction du prix de marché p (et de la fonction de coût)

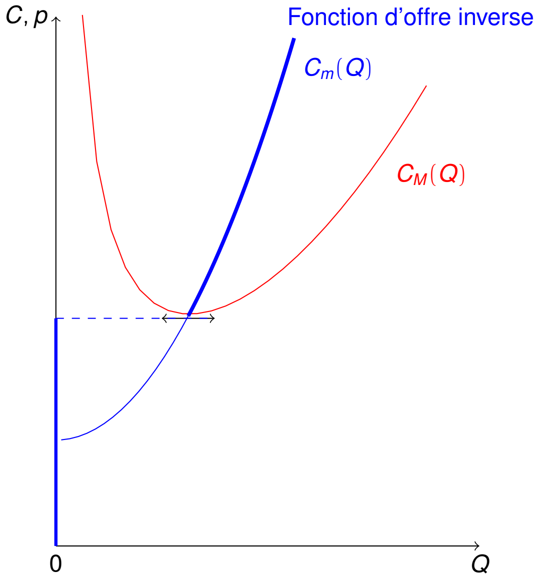
Cette condition garantit la maximisation du profit mais pas qu'il soit positif !

Sous quelle condition le profit est-il positif ou nul ?

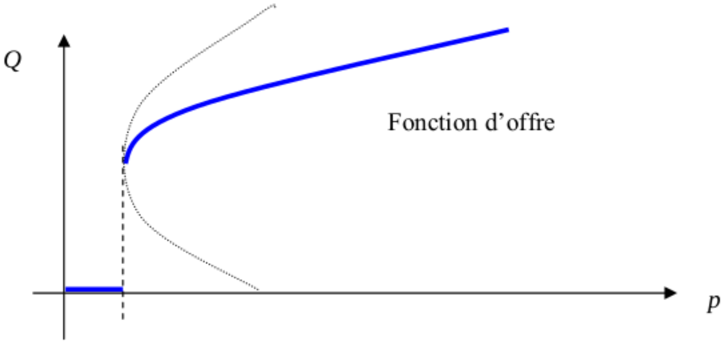
$$\Pi(Q) \geqslant 0 \Leftrightarrow pQ - C(Q) \geqslant 0 \Leftrightarrow p \geqslant \frac{C(Q)}{Q} \Leftrightarrow p \geqslant C_M(Q)$$

La firme ne décidera de produire que si le prix unitaire du bien excède son coût moyen de production : seuil de rentabilité

Dès lors que le prix de marché (donné) est supérieur au minimum du coût moyen, cette condition est nécessairement vérifiée



C, p
Fonction d'offre inverse
$C_m(Q)$
$C_M(Q)$
0
Q



Fonction d'offre de la firme

Résolution du problème à partir de la fonction de coût total $C(Q)$

1. On trouve la fonction d'offre $Q^\star$ qui dit quelle sera la production pour tout prix de marché p quand l'entreprise décide de produire en résolvant $\max_Q \Pi(Q) = pQ - C(Q)$

$$\Pi'(Q)|_{Q=Q^\star} = 0 \Leftrightarrow p = C_m(Q^\star)$$

$\Rightarrow$ Expression de $Q^s(p)$ en fonction de p

2. On cherche la valeur de p à partir duquel l'entreprise est prête à produire : condition de positivité du profit :

$$\Pi(Q) \geqslant 0 \Leftrightarrow p \geqslant C_M(Q)$$

$\Rightarrow$ Détermination du prix seuil (de rentabilité)

3. On a ainsi la fonction d'offre

$$Q^s(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; p < \text{Solution de l'étape 2} \\ \text{Solution de l'étape 1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple : La fonction de coût total d'une firme est $C(Q) = \frac{2}{3}Q^{3/2} + 72$.
1. Si la firme produit, elle produit la quantité $Q^\star$ solution de

$$\max_Q \ \Pi(Q) = pQ - C(Q) = pQ - \frac{2}{3}Q^{3/2} - 72$$

$$\Pi'(Q)|_{Q=Q^\star} = 0 \Leftrightarrow p - \frac{2}{3}\frac{3}{2}Q^{\star 1/2} = 0 \Leftrightarrow Q^{\star 1/2} = p \Leftrightarrow Q^\star = p^2$$

2. La firme ne produit que si $\Pi(Q) = pQ - C(Q) \geqslant 0 \Leftrightarrow p \geqslant C_M(Q)$

$$\begin{aligned}
\Pi(Q) \geqslant 0 \quad & \Leftrightarrow \quad p \geqslant C_M(Q) = \frac{\frac{2}{3}Q^{3/2} + 72}{Q} = \frac{2}{3}Q^{1/2} + \frac{72}{Q} \\
& \Leftrightarrow \quad p \geqslant \frac{2}{3}p + \frac{72}{p^2} \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}p \geqslant \frac{72}{p^2} \\
& \Leftrightarrow \quad p^3 \geqslant 3 \times 8 \times 9 = 3^3 \times 2^3 \\
& \Leftrightarrow \quad p \geqslant 6
\end{aligned}$$

3. Donc la fonction d'offre est

$$Q^s(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 6 \\ p^2 & \text{si } p \geqslant 6 \end{cases}$$

- Dans les faits, la libre entrée (et sortie) n'est pas vérifiée : coûts irrécupérables

$\Rightarrow$ Parfois les entreprises produisent à perte...
  - si l'entreprise produit (P), elle doit payer tous les coûts (fixes et variables) ;
  - si l'entreprise ne produit pas (NP), elle doit payer les coûts fixes : F

- Quand est-ce que l'entreprise décide de produire ?

$$\begin{aligned} \Pi^P \geqslant \Pi^{NP} \quad &\Leftrightarrow \quad pQ - CV(Q) - F \geqslant -F \\ &\Leftrightarrow \quad pQ - CV(Q) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p \geqslant \frac{CV(Q)}{Q} = CV_M(Q) \end{aligned}$$

- La firme ne décidera de continuer l'activité que si le prix unitaire excède le coût variable moyen de production

- Dès lors que le prix de marché (donné) est supérieur au minimum du coût variable moyen, cette condition est nécessairement vérifiée

Seuil de rentabilité

Le seuil de rentabilité est le prix à partir duquel l'entreprise fait un profit positif. Il se trouve au minimum du coût moyen.

Seuil de fermeture

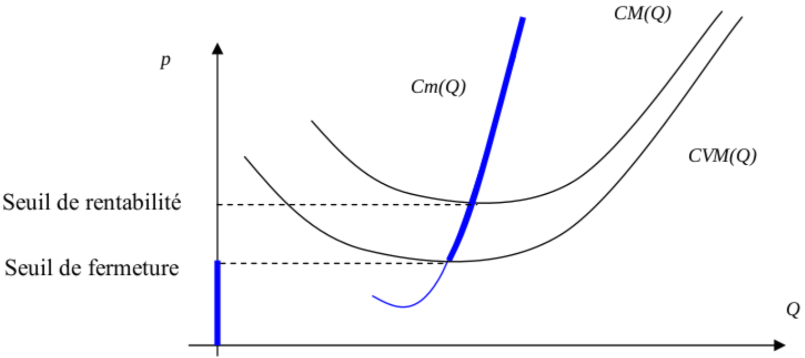
Le seuil de fermeture est le prix à partir duquel l'entreprise couvre le coût variable. Il se trouve au minimum du coût variable moyen.

- Tant que le prix de vente unitaire du bien couvre le coût moyen de production, le profit microéconomique est positif et l'on se situe au dessus du seuil de rentabilité.

- Si le prix de vente unitaire du bien est en dessous du coût moyen mais au dessus du coût variable moyen de production, la production continue mais le profit microéconomique est négatif. On se situe entre le seuil de rentabilité et le seuil de fermeture.

- Si le prix de vente unitaire du bien est en dessous du coût variable moyen, la production cesse et le profit microéconomique est négatif car l'entreprise continue à supporter la part fixe du coût. On se situe sous le seuil de fermeture.

Seuils de rentabilité et de fermeture



Expl : dans le secteur du tourisme : un tour opérateur, un établissement hôtelier ou une compagnie aérienne peuvent délibérément choisir de brader leurs prestations pour « remplir » séjours, hôtel ou avions, en ayant parfaitement conscience des pertes qu'engendrera cette activité aux tarifs où seront commercialisées les prestations.

Pertes néanmoins moindres que si non-production : les coûts d'exploitation d'un hôtel ne sont pas considérablement plus élevés lorsque l'hôtel est plein que lorsqu'il est presque vide ; il en va de même pour le coût de production d'un trajet aérien lorsqu'il n'y a qu'un seul passager au regard d'un vol complet.

Enfin rappelons qu'entre seuil de rentabilité et seuil de fermeture c'est le profit microéconomique qui est négatif. Il est donc même possible que sous le seuil de « rentabilité » la firme réalise néanmoins quelques maigres bénéfices au sens comptable du terme.

Partie 3 : l'équilibre

Chapitre 6 : L'équilibre sur un marché

F. Karamé
(frederic.karame@univ-lemans.fr)

Année universitaire 2023-2024

Dans la partie 1 : la demande du consommateur peut être étudiée sous de multiples aspects et dans de multiples dimensions : arbitrage consommation-loisir, arbitrage intertemporel.

On a étudié le comportement d'un individu pris isolément

Dans ce chapitre : on va agréger les demandes exprimées par l'ensemble des consommateurs souhaitant consommer un bien ou service particulier : **la fonction de demande globale**

Une hypothèse simplificatrice importante : la demande exprimée pour un bien particulier ne dépend plus que de son propre prix

Question importante : comment mesurer la satisfaction d'un groupe de consommateurs ?

Un intérêt : construire un outil (**la fonction de demande inverse**) pour mesurer le bien-être de ces consommateurs : **le surplus des consommateurs**.

C'est l'équivalent monétaire du bien-être éprouvé lors de la consommation d'un bien ou service, net de la somme d'argent dépensée pour acquérir le bien ou service considéré.

Outre les biens commercialisés, cet outil permet d'apprécier la satisfaction éprouvée pour la consommation de biens ou services **collectifs**, càd fournis (gratuitement ou non) aux citoyens : l'ordre public, la défense nationale, la justice, l'éclairage des rues, les jardins publics, les ponts sur les cours d'eau, les transports en commun, ...

ne pas confondre bien-être (ou welfare) avec welfare state (état-providence) qui désigne les systèmes de protection sociale.

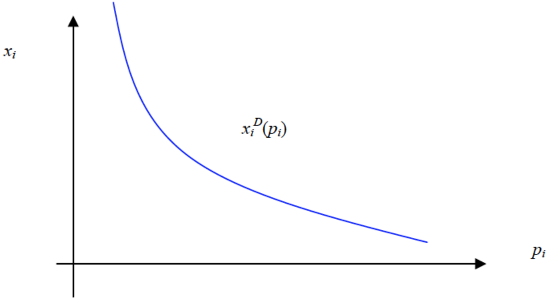
Même chose de manière symétrique du coté de l’offre.
On distinguera alors le court terme et le long terme...

Définition : Demande globale de bien i

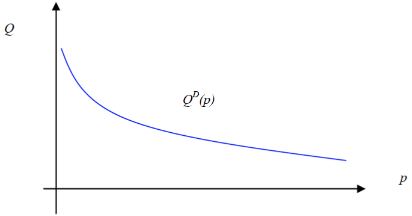
La demande globale d'un bien i est la somme des demandes exprimées par l'ensemble des agents participant - ou susceptibles de participer - à la consommation de ce bien. S'il y a m consommateurs acquérant ou susceptibles d'acquérir le bien, la demande globale x_i^D en bien i sera donc :

$$x_i^D(p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n, R^1, R^2, ..., R^m) = \sum_{k=1}^{m} x_i^k(p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n, R^k)$$

- **Simplification** : $x_i^D(p_i)$
- $x_i^D(p_i)$ est décroissante si bien ordinaire.
- $\longrightarrow$ prix de i augmente : demande globale de i baisse car
  1. demande individuelle baisse ;
  2. nbr de consommateurs pour ce bien diminue ;
  3. les 2



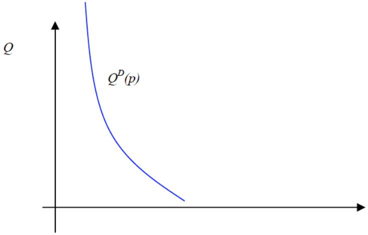
- Notation : $x_i^D(p_i) = Q^D(p)$
- Elasticité prix (directe) ϵ : mesure de sensibilité de la demande au prix du bien.



Demande globale

faiblement élastique au prix

(biens nécessaires : carburants, ...)



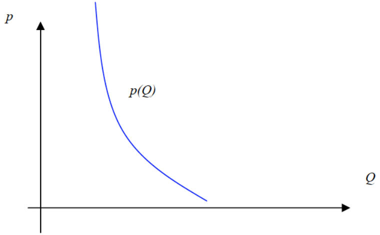
Demande globale

fortement élastique au prix

(biens non vitaux : fruits exotiques, ...)

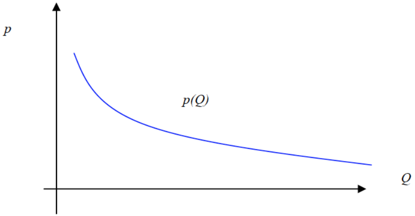
Définition : Fonction de demande inverse

La fonction de demande inverse relative à un bien quelconque est la relation fonctionnelle qui indique, pour un niveau donné de la quantité demandée, le prix auquel sera atteint cette quantité demandée. En d'autres termes il s'agit de la relation fonctionnelle entre prix et quantité demandée pour laquelle la quantité figure en abscisse et le prix figure en ordonnée. Si l'on note p le prix du bien et Q la quantité demandée de ce bien, la fonction de demande inverse est notée $p(Q)$.



Demande globale

faiblement élastique au prix



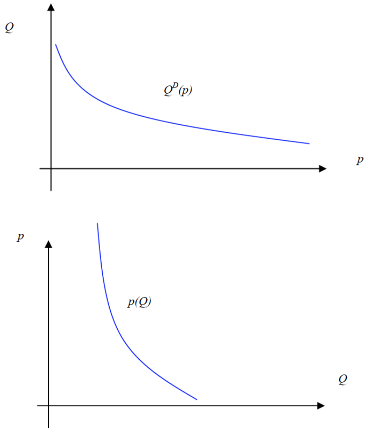
Demande globale

fortement élastique au prix

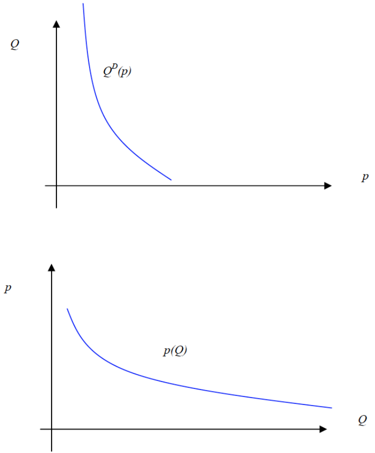
Fonction $p(Q)$ représentée dans l'espace $(0, Q, p)$, inverse de $Q^D(p)$ dans $(0, p, Q)$

La même représentation en échangeant les axes et le sens de la fonction.

Fonctions de demande et de demande inverse



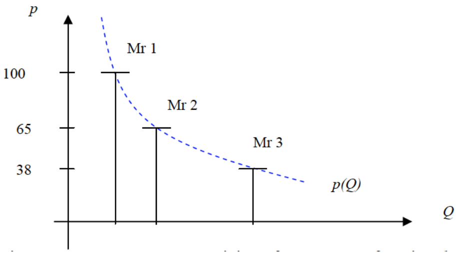
Demande globale
faiblement élastique au prix



Demande globale
fortement élastique au prix

La même représentation en échangeant les axes et le sens de la fonction.

- La disponibilité maximale à payer (DMP désormais) : le montant maximal qu'un acheteur est prêt à payer pour acquérir un bien ;
- Les déterminants de la DMP :
  1. Les bénéfices retirés de l'acquisition et de la consommation du bien ;
  2. Le revenu du consommateur ;
  3. La disponibilité d'autres biens et services.



Pour 3 consommateurs

- Supposons qu'un individu ne peut acheter qu'un bien.
- La courbe de demande inverse dans $(0, Q, p)$: chaque point représente un consommateur (pour le bien considéré) ; les consommateurs sont rangés par ordre décroissant de leur DMP.
- Pour 3 consommateurs, les trois points reliés donne lieu à une courbe discontinue qui représente une ébauche de la courbe de demande inverse.

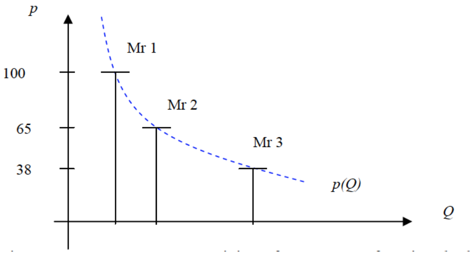
- Prix de vente $\leqslant$ DMP du consommateur *i*

  SC_i = DMP_i - *prix*

- Prix de vente > DMP du consommateur

  $SC_i = 0$

  $\longrightarrow$ Le consommateur ne participe pas à la consommation du bien.



3 consommateurs

- **Prix de vente = 100 euros**

  $\longrightarrow$ SC de Mr 1 = 100 - 100 = 0 euro
- **Prix de vente = 70 euros**

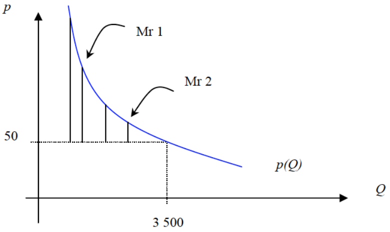
  $\longrightarrow$ SC de Mr 1 = 100 - 70 = 30 euros
- **Prix de vente = 50 euros**

  $\longrightarrow$ SC de Mr 1 = 100 - 50 = 50 euros

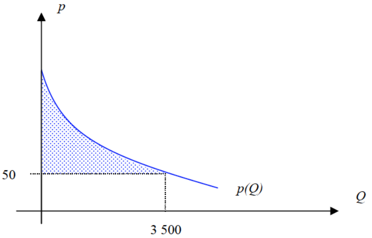
  $\longrightarrow$ SC de Mr 2 = 65 - 50 = 15 euros

Définition : Surplus d'un consommateur

Le surplus d'un consommateur quelconque tiré de la consommation d'un bien ou service particulier est défini comme l'écart entre sa disponibilité maximale à payer pour ce bien ou service et le prix qu'il paye effectivement pour l'acquérir. Dans le cas où le prix de vente du bien ou service est supérieur à sa disponibilité maximale à payer (encore appelée prix de réservation), celui-ci ne participe pas à la consommation du bien et son surplus est nul.



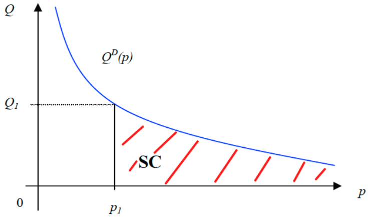
Surplus pour quelques consommateurs

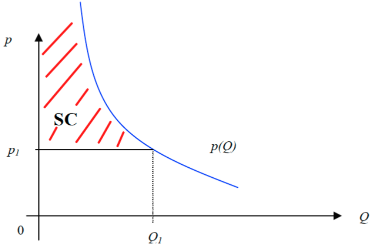


Surplus des consommateurs

A gauche : dans notre exemple de bien unitaire, 3500 consommateurs entrent sur le marché pour acheter le bien : SC = la somme des 3500 lignes verticales (pour le 3500ième, la DMP = prix, donc son surplus est nul)

A droite : on généralise à un bien divisible : SC = la surface bleue.



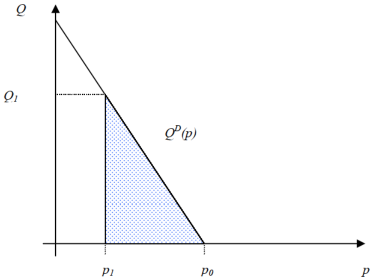


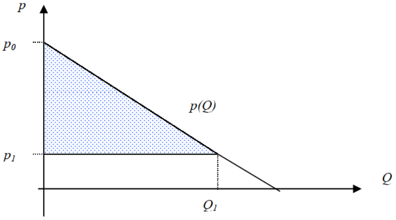
avec la fonction de demande

$$SC = \int_{p_1}^{+\infty} Q^D(p)dp$$

avec la fonction de demande inverse

$$SC = \int_0^{Q_1} p(Q)dQ - p_1 \times Q_1$$





avec la fonction de demande

$$SC = \frac{p_0 - p_1}{2} \times Q_1$$

avec la fonction de demande inverse

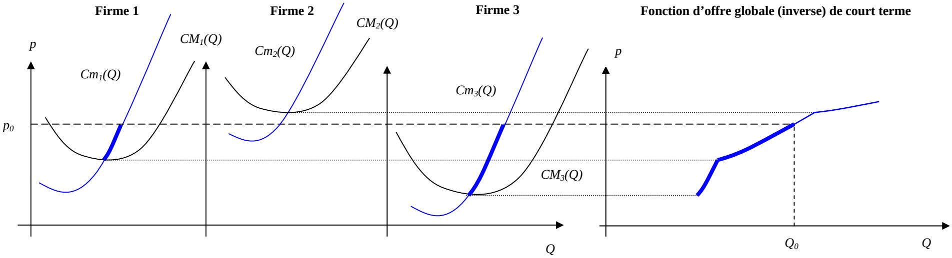
$$SC = \frac{p_0 - p_1}{2} \times Q_1$$

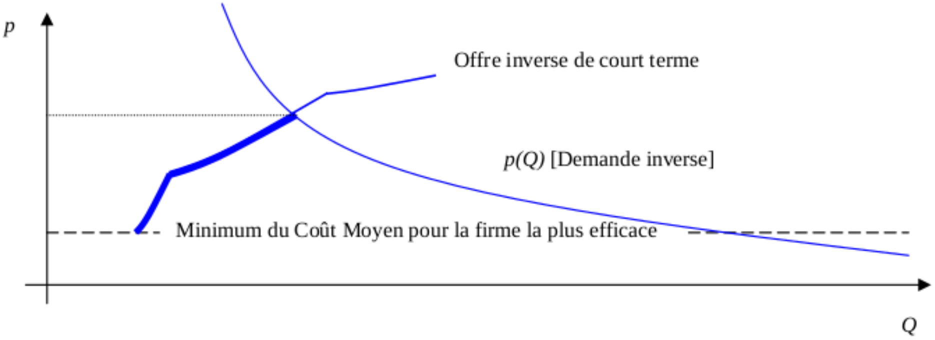
Court terme en microéconomie $\Leftrightarrow$ les technologies de production peuvent différer.

Donc les fonctions de coûts et les seuils de rentabilité peuvent différer.

Prenons un exemple avec 3 firmes pour construire l'offre agrégée...

Courbe d'offre agrégée inverse de court terme





Equilibre de CT : offre inverse de court terme + demande inverse

Firmes avec des technologies différentes, donc des fonctions de coûts différentes et donc certaines font des profits, d'autres non.

Si perspectives de profit, de nouvelles firmes veulent entrer sur le marché, avec la technologie la plus efficace pour être sûres de capter du profit

En CPP, tout nouvel entrant se dote de la technologie la plus performante car aucun brevet, aucune technologie secrète, aucune restriction d'accès aux différents procédés et techniques ne sont réputés exister.

$\Rightarrow$ le prix va baisser avec l'entrée des nouvelles firmes

$\Rightarrow$ le profit individuel va baisser $\rightarrow 0$.

En CPP : la technologie détermine le prix sur le marché.

- Proposition : la confrontation entre l'offre et la demande détermine le prix du marché.
- partiellement incorrect en CPP.
- Quantité effectivement vendue par les producteurs aux consommateurs = le résultat de la confrontation entre offre et demande,
- mais le prix d'équilibre sera déterminé par les conditions technologiques, c'est-à-dire les conditions dans lesquelles les firmes produisent.
- CPP $\Rightarrow$ efficacité productive absolue, càd $p = \min[C_M(.)]$ (indépendamment de l'intensité plus ou moins élevée de la demande).
- les caractéristiques de la technologie de production la plus performante (c'est-à-dire la moins coûteuse) déterminent le niveau auquel se fixe le prix.
- la technologie se diffuse et chaque firme produira au coût unitaire minimum : peut correspondre à l'élimination de firmes recourant à des technologies archaïques ou exagérément coûteuses, au profit de nouveaux arrivants adoptant la technologie la plus performante.
- En CPP, le processus d'entrées et sorties de firmes se fait de manière très souple et sans coût irrécupérable.

A CT, firmes avec des technologies différentes, donc des fonctions de coûts différentes et donc certaines font des profits, d’autres non.

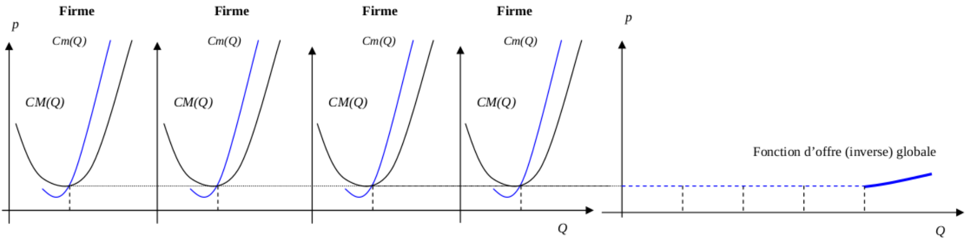
Si perspectives de profit, de nouvelles firmes veulent entrer sur le marché, avec la technologie la plus efficace pour être sûre de capter du profit

En CPP, tout nouvel entrant se dote de la technologie la plus performante car aucun brevet, aucune technologie secrète, aucune restriction d’accès aux différents procédés et techniques ne sont réputés exister.

$\Rightarrow$ le prix va baisser avec l’entrée des nouvelles firmes

$\Rightarrow$ le profit individuel va baisser $\rightarrow 0$.

Courbe d'offre agrégée inverse de long terme

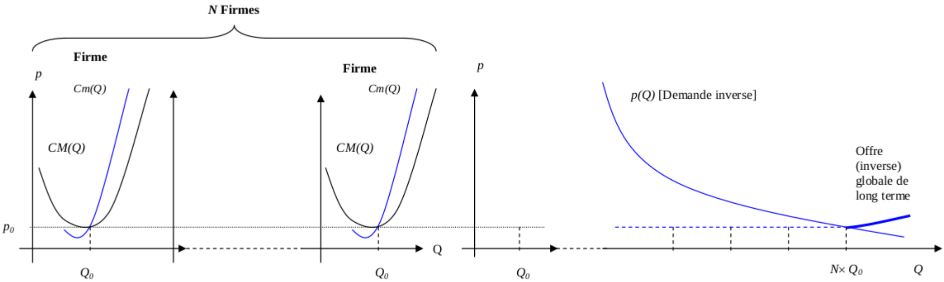


Toutes les firmes ont la technologie la plus performante

chaque firme offre la même quantité d'output dès que le prix atteint le seuil (désormais commun) que représente le minimum du coût moyen de production.

Si le prix dépasse ce seuil, chacune des firmes augmentera elle-même son offre de manière identique. donc lente croissance de la courbe d'offre (inverse) à la suite de la partie horizontale.

Combien de firmes entrent sur le marché ?



Toutes les firmes ont la technologie la plus performante et offrent Q_0 car

$$p_0 = C_m(Q_0) = C_M(Q_0)$$

(conditions pour produire et de profit nul) donc l'offre agrégée est $N \times Q_0$.

l’interaction entre l’offre et la demande détermine la quantité totale échangée sur le marché (et donc le nombre d’entreprises présentes à long terme)

le prix d’équilibre est déterminé par les conditions technologiques car égal au minimum du coût unitaire de production pour une quelconque firme utilisant la technologie la plus efficace.

Long terme en microéconomie

Dans le cadre du modèle de concurrence pure et parfaite, le long terme désigne le délai à l'issue duquel :

1) Toutes les firmes qui produisent le bien ou service ont adopté la technologie de production la plus efficace disponible,

2) Le nombre de firmes présentes s'est ajusté de manière à ce que le profit microéconomique de chacune d'entre elles soit nul.

Equilibre d’un marché

On dit d’un marché qu’il est à l’équilibre lorsque les quantités offertes et les quantités demandées sur ce marché sont égales. Le prix qui conduit à ce que les quantités offertes et demandées soient ainsi égales est appelé prix d’équilibre.

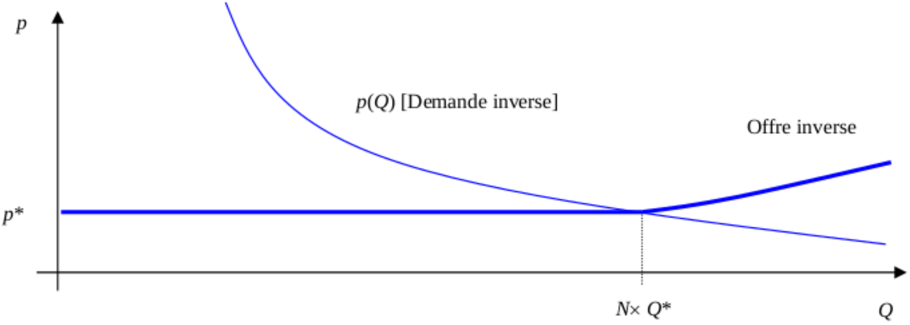
Proposition : Equilibre d'un marché en concurrence pure et parfaite

A l'équilibre de concurrence pure et parfaite, N firmes recourant à une même technologie (la plus efficace) vont chacune produire une quantité d'output $Q^\star$ telle que cette production se fasse au minimum de leur coût unitaire (commun) de production.

Le prix d'équilibre $p^\star$ sera égal au minimum de ce coût unitaire.

A ce prix $p^\star$, la demande globale exprimée par les consommateurs est égale à $N \times Q^\star$. Ainsi, les quantités globalement offertes et demandées sont identiques.

Offre agrégée inverse de long terme et demande inverse -> équilibre de long terme



Donc à long terme, la technologie détermine $p^\star$, qui détermine par la demande inverse les quantités échangées, ce qui, à l'équilibre, détermine le nombre de firmes sur le marché.

Partie 3 : l'équilibre

Chapitre 7 : Un premier aperçu de l'équilibre général : une économie de troc

F. Karamé
(frederic.karame@univ-lemans.fr)

Année universitaire 2023-2024

Le consommateur fait ses choix de consommation en fonction de son revenu et des prix : maximise sa satisfaction sous contrainte budgétaire, construit le panier optimal quand vérifie la condition équi-marginale.

Consommer = participation à l'acte économique premier : l'échange (la forme primitive : le troc)

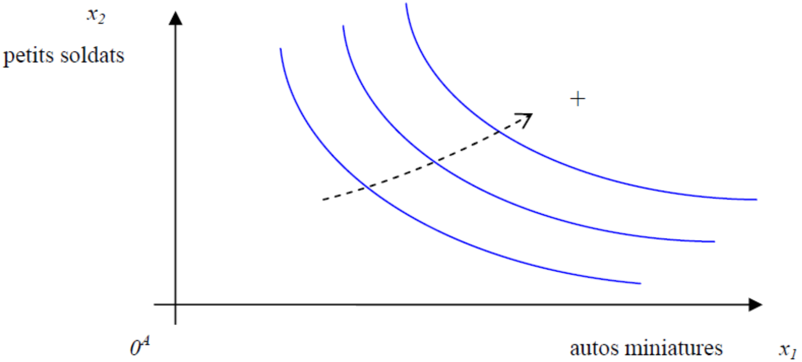
Présence d'un bien numéraire (ou monnaie) dont le prix est 1 : bien particulier de référence pour exprimer la valeur de tout bien

tout désir de consommation n'est que l'expression d'un désir d'échange entre le bien convoité et un certain nombre d'unités du bien monnaie

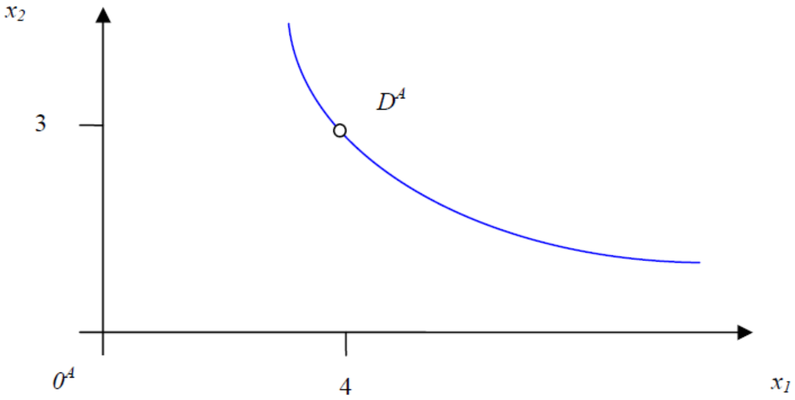
Dans le présent chapitre, détailler l'émergence des termes de l'échange entre deux individus désireux de procéder à l'échange d'un bien contre un autre.

Une économie d'échange sans prix

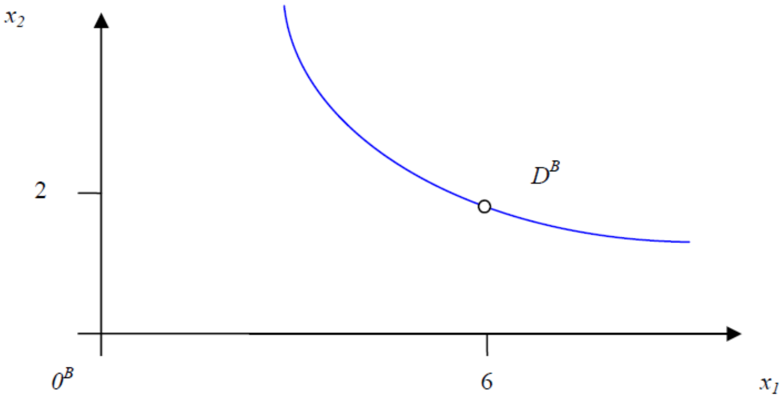
Nous verrons aussi émerger la notion d'optimalité au sens de Pareto, notion centrale permettant de juger du caractère plus ou moins "efficace" de l'allocation des ressources.



x_2
petits soldats
+
0^A
autos miniatures
x_1

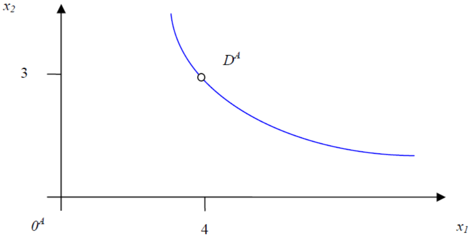


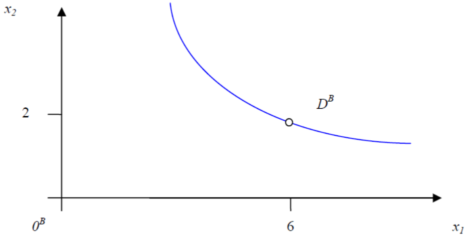
Sa dotation initiale en biens 1 et 2 : $(d_1^A, d_2^A) = (4; 3)$



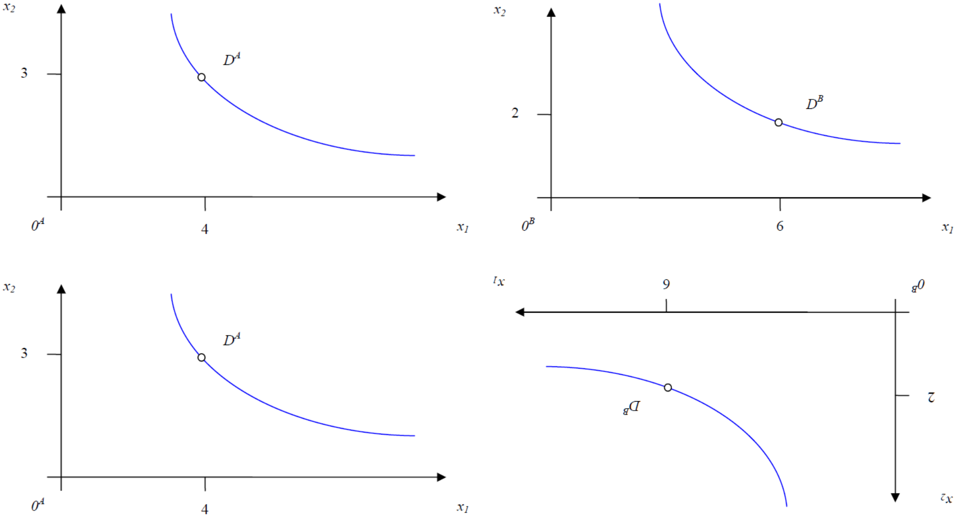
Sa dotation initiale en biens 1 et 2 : $(d_1^B, d_2^B) = (6; 2)$

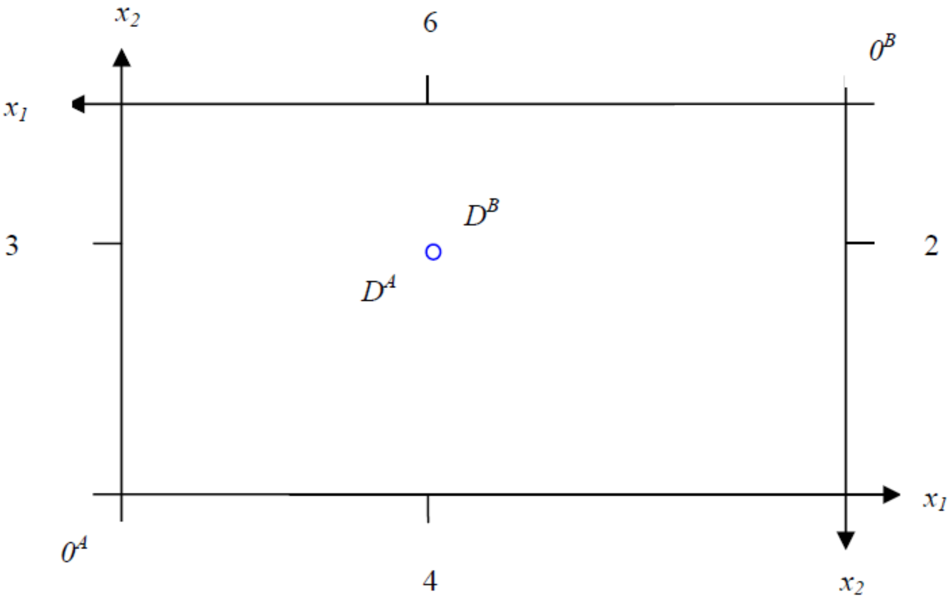
Vers une seule représentation





Vers une seule représentation





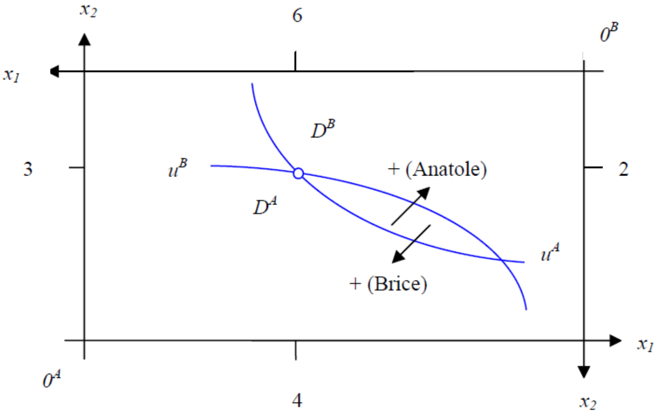
Taille de la boite : la quantité totale de biens 1 et 2 dans l'économie.

La boîte de Pareto-Edgeworth

La boîte de Pareto-Edgeworth d'une économie (souvent appelée boîte d'Edgeworth) est un rectangle figurant toutes les répartitions possibles des consommations de deux biens entre deux agents économiques. La longueur et la largeur de cette boîte correspondent respectivement aux quantités totales présentes de biens 1 et 2 dans l'économie.

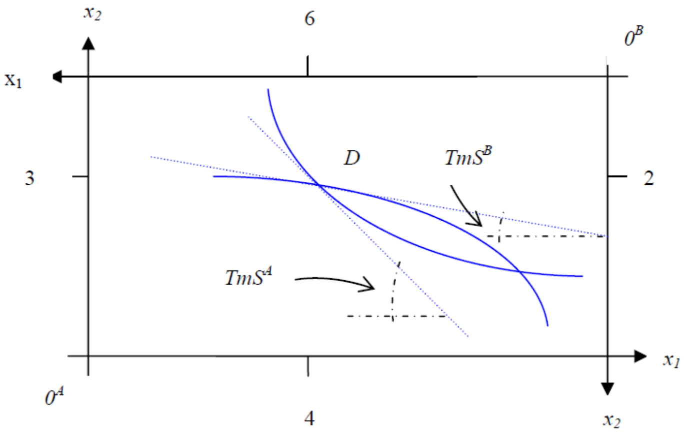
Les 2 agents sont favorables à échanger

Figure 5 : Courbes d'indifférences de A et B passant par le point de leurs dotations initiales



Les 2 agents sont favorables à échanger

Figure 6 : Taux marginaux de substitution de *A* et *B* au point de leurs dotations initiales



- les deux courbes d'indifférence forment une "lentille" dont l'un des sommets est le point D

- si les TmS étaient identiques, les deux tangentes seraient confondues et aucune lentille ne se formerait.

- En tout point de cette lentille, A et B accroîtraient leur satisfaction au regard de la situation en D.

- la non coïncidence des TmS ou l'existence d'une lentille sont le signe de l'existence d'opportunités d'échange entre les deux agents.

Pour l'instant, on sait que :

- $u_A(x_1 ; x_2) = x_1^2 x_2$ et $u_B(x_1 ; x_2) = x_1 x_2$
- $TmS^A_{1/2} = -\dfrac{2x_2}{x_1}$ et $TmS^B_{1/2} = -\dfrac{x_2}{x_1}$
- Au point D, $TmS^A_{1/2} = -\dfrac{3}{2}$ et $TmS^B_{1/2} = -\dfrac{1}{3}$

  $\Rightarrow$ Au point de dotation initiale, A est prêt à céder 3 unités de bien 2 contre 2 unités de bien 1, tandis que B est prêt à céder 1 unité de bien 2 contre 3 unités de bien 1.

Optimum de Pareto
Une allocation est optimale (au sens de Pareto) si aucun individu ne peut accroître sa satisfaction sans détériorer celle d'un autre au moins. A l'inverse, s'il est possible de trouver une manière quelconque d'accroître la satisfaction d'un ou plusieurs individus sans pénaliser quelqu'un d'autre, il s'agit d'une allocation non optimale ; s'il n'est pas possible de trouver une telle amélioration, l'allocation est optimale.

- Notion d'efficacité économique et non d'équité ou de justice.

- L'efficacité est un critère objectif mais il n'existe aucun critère d'équité universel : l'économiste peut néanmoins se préoccuper de questions d'équité, mais il doit au préalable définir le critère qu'il retient, en ayant conscience de son caractère arbitraire

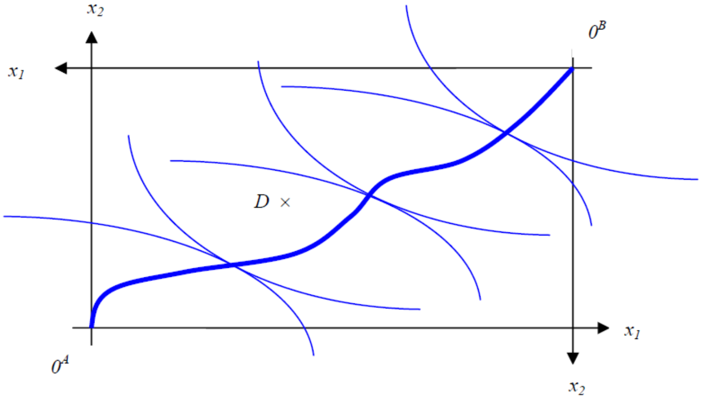
- D n'est pas un optimum de Pareto car les TmS diffèrent et il existe une lentille de situations permettant d'accroître simultanément leurs satisfactions.

- Si les TmS des deux enfants étaient identiques en D, il n'existerait pas une telle lentille délimitant une zone d'échanges mutuellement avantageux.

- Plus largement, si en une allocation quelconque, les TmS des deux agents sont identiques, il n'y a pas d'opportunité de procéder à un échange mutuellement bénéfique : donc c'est un optimum de Pareto.

- En d'autres termes, les optima de Pareto sont les points pour lesquels les tangentes aux courbes d'indifférence des agents sont confondues, ou, pour dire les choses plus simplement, ce sont les points de tangence entre les courbes d'indifférence.

Figure 7 : Ensemble des points de tangence entre les courbes d'indifférence des deux agents



Chaque consommateur trouve son optimum en égalisant son TmS (personnel) au rapport des prix (commun).

Donc une situation optimale pour tous revient à égaliser tous les TmS.

La courbe des contrats

Dans une économie d'échange, la courbe des contrats est la courbe des optima de Pareto.

Que sont les prix ? Des termes de l’échange !

Pour écrire le programme du "consommateur", on attribue les prix (fictifs) p_1 et p_2, respectivement pour le bien 1 et pour le bien 2.

Les ressources de A correspondent à la somme de ses dotations initiales (en valeur), soit :

$$p_1 d_1^A + p_2 d_2^A = 4p_1 + 3p_2$$

Les dépenses de A correspondent à : $p_1 x_1^A + p_2 x_2^A$

Les ressources de B correspondent à la somme de ses dotations initiales (en valeur), soit :

$$p_1 d_1^B + p_2 d_2^B = 6p_1 + 2p_2$$

Les dépenses de B correspondent à : $p_1 x_1^B + p_2 x_2^B$

Résolution du programme de maximisation sous contrainte budgétaire de A

$$\max_{x_1,x_2} u_A(x_1;x_2) = x_1^2 x_2$$
$$s.c. \;\; p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant 4p_1 + 3p_2$$

$$x_1^{A\star} = \frac{2}{3}\frac{4p_1+3p_2}{p_1} = \frac{8p_1+6p_2}{3p_1}$$
$$x_2^{A\star} = \frac{4p_1+3p_2}{3p_2}$$

Résolution du programme de maximisation sous contrainte budgétaire de B

$$\max_{x_1, x_2} u_B(x_1; x_2) = x_1 x_2$$
$$s.c.\ \ p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant 6p_1 + 2p_2$$

$$x_1^{B\star} = \frac{6p_1 + 2p_2}{2p_1}$$
$$x_2^{B\star} = \frac{6p_1 + 2p_2}{2p_2}$$

Fonction de demande excédentaire

Dans une économie d'échange, la demande excédentaire d'un bien exprimée par un agent est la différence entre sa demande optimale et sa dotation initiale en ce bien.
La demande excédentaire est un outil permettant de mettre en évidence le désir d'échange du consommateur considéré en fonction du prix relatif des biens.

Pour A :

$$z_1^A = x_1^{A\star} - d_1^A = \frac{8p_1 + 6p_2}{3p_1} - 4 = \frac{6p_2 - 4p_1}{3p_1}$$

$$z_2^A = x_2^{A\star} - d_2^A = \frac{4p_1 + 3p_2}{3p_2} - 3 = \frac{4p_1 - 6p_2}{3p_2}$$

Pour B :

$$z_1^B = x_1^{B\star} - d_1^B = \frac{6p_1 + 2p_2}{2p_1} - 6 = \frac{2p_2 - 6p_1}{2p_1}$$

$$z_2^B = x_2^{B\star} - d_2^B = \frac{6p_1 + 2p_2}{2p_2} - 2 = \frac{6p_1 - 2p_2}{2p_2}$$

Comment interpréter ces expressions ? Prenons un exemple...

$$z_1^A \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{6p_2 - 4p_1}{3p_1} \geqslant 0 \Leftrightarrow 6p_2 - 4p_1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 6p_2 \geqslant 4p_1 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} \leqslant \frac{3}{2}$$

A a donc une demande excédentaire en bien 1 positive si $\frac{p_1}{p_2} \leqslant \frac{3}{2}$.

A l'inverse, il aura une demande excédentaire en bien 1 négative (une offre excédentaire positive) si $\frac{p_1}{p_2} > \frac{3}{2}$.

En reproduisant cette démarche avec B : on obtient $\frac{p_1}{p_2} \leqslant \frac{1}{3}$, et le tableau suivant :

Tableau 1 : Offres et demandes excédentaires en autos selon les termes de l'échange

Termes de l'échange	$\frac{p_1}{p_2} \leq \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \leq \frac{p_1}{p_2} \leq \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq \frac{p_1}{p_2}$
Anatole	Demande excédentaire d'autos	Demande excédentaire d'autos	Offre excédentaire d'autos
Brice	Demande excédentaire d'autos	Offre excédentaire d'autos	Offre excédentaire d'autos

$\Rightarrow$ L'échange est possible si les termes de l'échange sont compris entre $1/3$ et $3/2$.

Équilibre général d'une économie d'échange

L'équilibre général d'une économie d'échange est une allocation telle que, si les agents de cette économie l'ont atteinte, ils ne s'en écarteront pas.

Le rapport d'échange d'équilibre se détermine en résolvant un système d'équations qui établit que la somme des demandes excédentaires relatives à chaque bien, pris séparément, doit être nulle.

Dans le cas de 2 agents, l'équilibre est atteint lorsque l'offre (excédentaire de l'un) est égale à la demande (excédentaire de l'autre).

Autrement dit, les 2 s'entendent sur les quantités à échanger...

En résolvant le système d'équations

$$z_1^A + z_1^B = 0$$
$$z_2^A + z_2^B = 0$$

on trouve le prix relatif $\frac{p_1}{p_2} = \frac{9}{13}$ caractérisant les termes de l'échange.

$$\begin{cases} z_1^A + z_1^B = 0 \\ z_2^A + z_2^B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6p_2 - 4p_1}{3p_1} + \dfrac{2p_2 - 6p_1}{2p_1} = 0 \\ \dfrac{4p_1 - 6p_2}{3p_2} + \dfrac{6p_1 - 2p_2}{2p_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9p_2 - 13p_1 = 0 \\ 13p_1 - 9p_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{9}{13} \\ \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{9}{13} \end{cases}$$

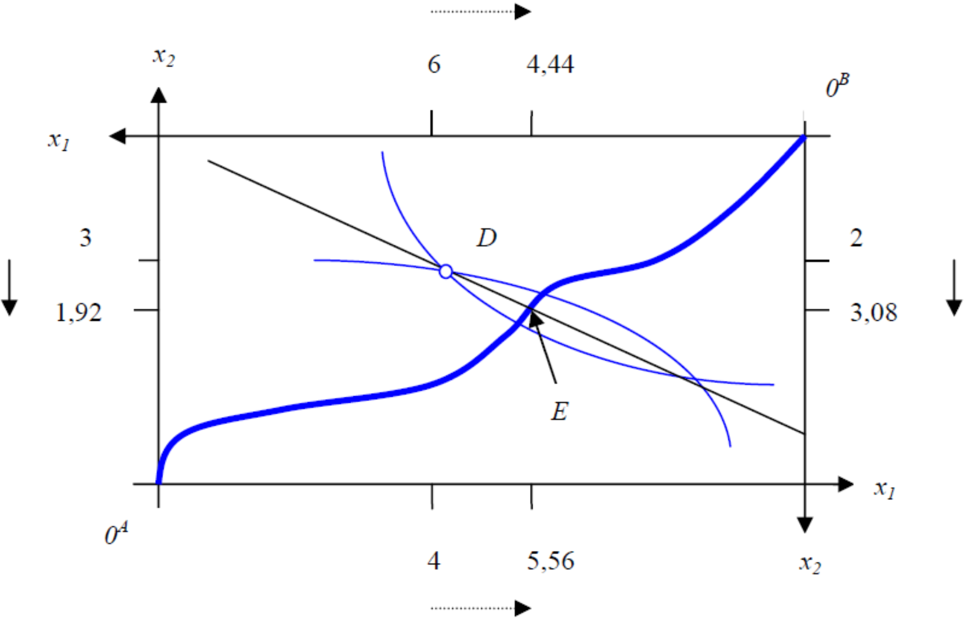
Le système est sous-déterminé...

L'allocation d'équilibre, notée E, est telle que $TmS^A_{1/2} = TmS^B_{1/2} = -\dfrac{p_1}{p_2}$.

Pour déterminer les coordonnées du point E dans la boîte d'Edgeworth, il faut donc résoudre le programme suivant :

$$\begin{cases} TmS^A_{1/2} = -\frac{p_1}{p_2} \\ TmS^B_{1/2} = -\frac{p_1}{p_2} \\ x_1^A + x_1^B = 10 \\ x_2^A + x_2^B = 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{2x_2^A}{x_1^A} = \frac{9}{13} \\ \frac{x_2^B}{x_1^B} = \frac{9}{13} \\ x_1^A + x_1^B = 10 \\ x_2^A + x_2^B = 5 \end{cases}$$

Il vient : $x_1^A = \frac{50}{9} \approxeq 5.56$, $x_2^A = \frac{25}{13} \approxeq 1.92$, $x_1^B = \frac{40}{9} \approxeq 4.44$ et $x_2^B = \frac{40}{13} \approxeq 3.08$



x_2
6
4,44
0^B
x_1
3
2
D
1,92
3,08
E
x_1
0^A
4
5,56
x_2

E est l'équilibre général de cette économie d'échanges.

processus de troc spontané entre les deux consommateurs selon un rapport d'échanges qui se détermine par la confrontation de leurs désirs d'échanges.

Si l'on n'est peu convaincu par l'idée que le processus de troc conduise "en une seule fois" à l'équilibre, on peut envisager un processus avec tâtonnement : idée originelle par Walras, le père de l'équilibre général.

Idée d'un commissaire-priseur (fictif) proposant des prix (des rapports d'échange) aux différents agents, et les révisant, en fonction des intentions d'offre et de demande, jusqu'à égalisation de toutes les offres et toutes les demandes.

Ce processus de tâtonnement dit walrasien conduit à un système de prix d'équilibre, sous-entendu d'équilibre de tous les marchés simultanément, ou équilibre général.

L'une des caractéristiques de l'équilibre walrasien est qu'il suffit que $(n-1)$ marchés soient en équilibre pour que le n ième le soit aussi.

En conséquence, on ne peut déterminer que $(n-1)$ prix relatifs et non n prix absolus.

C'est ce qu'on a constaté ici pour $n=2$

L'une des lectures que l'on peut adopter est de considérer que la monnaie est le n ième bien, le bien numéraire, celui dont le prix est égal à 1.

Ainsi les $(n-1)$ autres prix deviennent des prix absolus au sens usuel du terme.

Premier théorème de l’économie du bien-être

Dans une économie de concurrence pure et parfaite, sans externalités, si les préférences des consommateurs sont strictement convexes, l’équilibre général est un optimum de Pareto.

Ce théorème a un message fort : si on laisse les agents produire, échanger et consommer comme bon leur semble, on aboutit à une allocation des ressources optimale au sens de Pareto (sans intervention extérieure, en particulier celle de l'État).

Plusieurs facteurs peuvent venir nuancer ce message :

- préférences non strictement convexes
- existence de biens collectifs (justice, . . .) et/ou d'externalités (pollution, . . .)
- marchés non concurrentiels (monopoles, oligopoles, . . .)
- etc...