L2 Economie-Gestion
Calcul économique 2

F. Karamé

Examen de 2de session, juin 2016

Aucun document autorisé. Calculatrice interdite. Durée : 1h30.

EXERCICE 1 : Soit le modèle de régression simple : $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$. L'estimateur des MCO de b est $\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})(y_t-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\bar{x})^2}$. On s'intéresse à l'effet du choix des unités de la variable x sur le paramètre estimé associé. Par exemple, on remplace x_t (mesuré en kilogrammes) par x_t^* (mesuré en grammes) dans la régression : on a alors $x_t^* = 1000 \times x_t$.

1. Ecrire $\hat{b}^*$, l'estimateur de b^*, si $y_t = a^* + b^* x_t^* + u_t$.
2. Exprimer $\bar{x}^*$ en fonction de $\bar{x}$.
3. Exprimer $\sum_{t=1}^{T}(x_t^* - \bar{x}^*)(y_t - \bar{y})$ en fonction de $\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$.
4. Exprimer $\sum_{t=1}^{T}(x_t^* - \bar{x}^*)^2$ en fonction de $\sum_{t=1}^{T}(x_t - \bar{x})^2$.
5. En déduire $\hat{b}^*$ en fonction de $\hat{b}$.
6. Conclure.

EXERCICE 2 : Calculez la dérivée de $f(x) = xln(x) - x$. Comment appeler cette fonction relativement à $ln(x)$?

EXERCICE 3 : Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une suite de n variables aléatoires identiquement et indépendamment distribuées selon une loi exponentielle de paramètre θ (rappel : sa densité de probabilités s'écrit $f(x_i) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}}, \forall x_i > 0, \theta > 0$. On veut estimer le paramètre θ (qui est aussi l'espérance de cette loi exponentielle) par maximum de vraisemblance : $\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$.

1. Calculer $ln(f(x_i))$.
2. Calculer sa dérivée par rapport à θ.
3. En déduire que $\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} ln(f(x_i)))}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$.
4. Poser et résoudre la condition du premier ordre. Montrer qu'une solution possible est $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$.
5. Bonus : Calculer la dérivée seconde et l'exprimer pour $\theta = \hat{\theta}$.
6. Bonus : Confirmer la solution trouvée en montrant qu'on est bien à un maximum.

EXERCICE 4 : Soit la fonction $f(.)$ définie sur $]0, 1]$ telle que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1. Donner une primitive de $f(.)$.
2. Calculer $\int_a^1 f(x)\, dx$.
3. En déduire la limite quand $a \longrightarrow 0^+$.

EXERCICE 5 : Intégrer par parties : $\int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx$.

EXERCICE 6 : Soit la fonction $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_2 + 4$.

1. Résoudre le système des conditions du premier ordre pour déterminer un extremum possible.
2. Calculer la matrice hessienne et conclure.