L2 Economie-Gestion
Calcul économique 2

F. Karamé

Examen de 1ère session
décembre 2015

Aucun document autorisé. Calculatrice interdite. Durée : 1h30.

EXERCICE 1 :

1. Montrez que $\sum_{n=1}^{N}[ln(n+2) - 2ln(n+1) + ln(n)] = ln[\frac{N+2}{2(N+1)}]$ (vous utiliserez pour cela un changement d'indices pour vous ramener à $ln(n)$).
2. En déduire la limite quand N tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2 : En les dérivant successivement, devinez l'expression générale de la dérivée d'ordre n des fonctions suivantes et démontrez-les par récurrence :

1. $f(x) = e^{\theta x}$
2. $g(x) = \frac{1}{x}$

EXERCICE 3 : Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une suite de n variables aléatoires identiquement et indépendamment distribuées selon une loi de Bernoulli de probabilité p (rappel : sa loi de probabilités s'écrit $P(X_i = x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$). On veut estimer la probabilité p par maximum de vraisemblance : $\hat{p} = arg \underset{p}{max} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$.

1. Pourquoi calculer $\sum_{i=1}^{n} ln(P(X_i = x_i))$?
2. Ecrire et résoudre les conditions du premier ordre. Montrer qu'une solution possible est $\hat{p} = \bar{x}$.
3. Confirmer cette solution en montrant qu'on est bien à un maximum.

EXERCICE 4 : Soit la fonction $f(.)$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{c}{(1+x)^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et c un réel.

1. Déterminer c pour que $f(.)$ soit une densité de probabilités.
2. Déterminer la fonction de répartition associée $F(.)$.
3. En utilisant une intégration par parties, montrer que l'espérance est égale à $2ln(2) - 1$.
4. Bonus : en utilisant une intégration par parties, montrer que la variance est égale à $2 - 4[ln(2)]^2$.

EXERCICE 5 : Soit la fonction $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 6x_2 + 4$.

1. Résoudre le système des conditions du premier ordre pour déterminer un extremum possible.
2. Calculez la matrice hessienne et conclure.