

**Université du Maine**  
**Année universitaire 2013-2014**  
**Licence 2 Economie & Gestion**  
**Cours d'Econométrie**  
**F. Karamé**  
**Partiel mai 2014**

**La qualité de la rédaction, de la présentation et des raisonnements participent au calcul des points. Aucun document autorisé. Pas de calculatrice ni de téléphone portable.**

### **Exercice**

1. Rappelez (sans la démontrer) la définition de l'estimateur des MCO  $\hat{\beta}$ .
2. Montrez que  $\hat{\beta}$  est sans biais.
3. Calculez sa matrice de variances-covariances.
4. Supposons à présent que  $\hat{\beta} \simeq N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$ . Soient  $D$  et  $d$  respectivement une matrice et un vecteur non aléatoires de dimension  $(r \times k)$  et  $(r \times 1)$ .
5. Quelle est la loi suivie par le vecteur de variables aléatoires  $(D\hat{\beta} - d)$  ?
6. Calculez son espérance et sa variance si on se place sous l'hypothèse que  $D\beta - d = 0$ .
7. Construire la forme quadratique associée. Quelle est sa loi et son nombre de degrés de liberté ?
8. En quoi cette statistique est-elle intéressante ? Quel est son usage ?

### **Problème**

On cherche à expliquer la consommation totale d'essence aux USA. Pour cela on dispose des données annuelles de 1960 à 1995 :

- $G$  : la consommation totale d'essence (dépenses totales divisées par l'indice des prix)
- $Pop$  : la population totale (en millions de personnes)
- $Y$  : le revenu réel disponible par tête
- $P_g$  : l'indice de prix de l'essence
- $P_{nc}$  : l'indice des prix des nouvelles voitures
- $P_{oc}$  : l'indice de prix des voitures d'occasion.

#### **Partie 1**

- 1) Rappeler comment on obtient généralement une fonction de demande. Quels en sont les arguments ? Pourquoi doit-on diviser la consommation totale d'essence par l'indice des prix ?
- 2) On veut estimer le modèle de régression simple suivant :

$$\ln\left(\frac{G}{Pop}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(Y) + u^A$$

Comment s'interprète le coefficient associé à la variable explicative ?

3) Les résultats de l'estimation par les MCO sont les suivants :

| Modèle A         |                   |                   |                |
|------------------|-------------------|-------------------|----------------|
| <i>Paramètre</i> | <i>Estimation</i> | <i>Ecart-type</i> | <i>Student</i> |
| $\alpha_0$       | -6,04963165       | 0,51415367        | -11,7661936    |
| $\alpha_1$       | 0,66359028        | 0,05641878        | 11,7618686     |
| SCR              | 0,15888238        |                   |                |
| SCT              | 0,805354          |                   |                |

Discutez la significativité du paramètre estimé.

- 4) Donnez une estimation par intervalle de confiance du paramètre  $\alpha_1$ .
- 5) A quel risque s'expose-t-on avec un tel modèle ? Quelles en sont les conséquences sur les paramètres estimés ?

## Partie 2

On veut à présent estimer les trois modèles suivants :

$$\ln\left(\frac{G}{Pop}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(Y) + \alpha_2 \ln(Pg) + u^B$$

$$\ln\left(\frac{G}{Pop}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(Y) + \alpha_2 \ln(Pg) + \alpha_3 \ln(Pnc) + u^C$$

$$\ln\left(\frac{G}{Pop}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(Y) + \alpha_2 \ln(Pg) + \alpha_3 \ln(Pnc) + \alpha_4 \ln(Puc) + u^D$$

Les résultats d'estimation sont donnés dans le tableau 2.

- 6) Dans le modèle D, commentez le signe des paramètres estimés ?
- 7) Rappelez la définition du  $R^2$  et le calculez pour le modèle D.
- 8) En déduire la statistique de significativité globale de cette régression (vous rappellerez l'hypothèse nulle, les modèles contraint et non contraint, la statistique de test, la loi suivie et ses degrés de liberté, la valeur critique et la conclusion du test).
- 9) Tester l'hypothèse jointe de nullité des paramètres  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$ . (vous rappellerez l'hypothèse nulle, les modèles contraint et non contraint, la statistique de test, la loi suivie et ses degrés de liberté, la valeur critique et la conclusion du test).
- 10) Ecrire  $H_0$  sous la forme matricielle :  $D\beta - d = 0$ .
- 11) Comment choisiriez-vous entre les 4 modèles présentés ? Posez toutes les statistiques en décrivant bien l'hypothèse nulle, les modèles contraint et non contraint, la statistique de test, la loi suivie et ses degrés de liberté, la valeur critique et la conclusion du test.

|                  | Modèle B          |                   |                | Modèle C          |                   |                | Modèle D          |                   |                |
|------------------|-------------------|-------------------|----------------|-------------------|-------------------|----------------|-------------------|-------------------|----------------|
| <i>Paramètre</i> | <i>Estimation</i> | <i>Ecart-type</i> | <i>Student</i> | <i>Estimation</i> | <i>Ecart-type</i> | <i>Student</i> | <i>Estimation</i> | <i>Ecart-type</i> | <i>Student</i> |
| $\alpha_0$       | -10,6758469       | 0,79004646        | -13,5129355    | -11,9261416       | 0,62255478        | -19,1567747    | -12,3418405       | 0,67489471        | -18,2870607    |
| $\alpha_1$       | 1,18584045        | 0,08871663        | 13,3666081     | 1,32754839        | 0,06999781        | 18,9655704     | 1,37339912        | 0,07562767        | 18,1600071     |
| $\alpha_2$       | -0,19577127       | 0,03007079        | -6,51034612    | -0,06233738       | 0,03297618        | -1,89037628    | -0,05909513       | 0,03248496        | -1,81915374    |
| $\alpha_3$       | -                 | -                 | -              | -0,29499938       | 0,05427071        | -5,43570115    | -0,12679667       | 0,12699351        | -0,99844997    |
| $\alpha_4$       | -                 | -                 | -              | -                 | -                 | -              | -0,11870847       | 0,0813371         | -1,45946283    |
| SCR              | 0,06955158        |                   |                | 0,03616189        |                   |                | 0,03383693        |                   |                |
| SCT              | 0,805354          |                   |                | 0,805354          |                   |                | 0,805354          |                   |                |

Loi de Fisher  
(Valeurs de  $x$  telles que  $Prob(F_{p,q} \leq x) = 95\%$ )

| $q \backslash p$ | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     | 12     |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1                | 161,45 | 199,50 | 215,71 | 224,58 | 230,16 | 233,99 | 236,77 | 238,88 | 240,54 | 241,88 | 243,91 |
| 2                | 18,51  | 19,00  | 19,16  | 19,25  | 19,30  | 19,33  | 19,35  | 19,37  | 19,38  | 19,40  | 19,41  |
| 3                | 10,13  | 9,55   | 9,28   | 9,12   | 9,01   | 8,94   | 8,89   | 8,85   | 8,81   | 8,79   | 8,74   |
| 4                | 7,71   | 6,94   | 6,59   | 6,39   | 6,26   | 6,16   | 6,09   | 6,04   | 6,00   | 5,96   | 5,91   |
| 5                | 6,61   | 5,79   | 5,41   | 5,19   | 5,05   | 4,95   | 4,88   | 4,82   | 4,77   | 4,74   | 4,68   |
| 6                | 5,99   | 5,14   | 4,76   | 4,53   | 4,39   | 4,28   | 4,21   | 4,15   | 4,10   | 4,06   | 4,00   |
| 7                | 5,59   | 4,74   | 4,35   | 4,12   | 3,97   | 3,87   | 3,79   | 3,73   | 3,68   | 3,64   | 3,57   |
| 8                | 5,32   | 4,46   | 4,07   | 3,84   | 3,69   | 3,58   | 3,50   | 3,44   | 3,39   | 3,35   | 3,28   |
| 9                | 5,12   | 4,26   | 3,86   | 3,63   | 3,48   | 3,37   | 3,29   | 3,23   | 3,18   | 3,14   | 3,07   |
| 10               | 4,96   | 4,10   | 3,71   | 3,48   | 3,33   | 3,22   | 3,14   | 3,07   | 3,02   | 2,98   | 2,91   |
| 11               | 4,84   | 3,98   | 3,59   | 3,36   | 3,20   | 3,09   | 3,01   | 2,95   | 2,90   | 2,85   | 2,79   |
| 12               | 4,75   | 3,89   | 3,49   | 3,26   | 3,11   | 3,00   | 2,91   | 2,85   | 2,80   | 2,75   | 2,69   |
| 13               | 4,67   | 3,81   | 3,41   | 3,18   | 3,03   | 2,92   | 2,83   | 2,77   | 2,71   | 2,67   | 2,60   |
| 14               | 4,60   | 3,74   | 3,34   | 3,11   | 2,96   | 2,85   | 2,76   | 2,70   | 2,65   | 2,60   | 2,53   |
| 15               | 4,54   | 3,68   | 3,29   | 3,06   | 2,90   | 2,79   | 2,71   | 2,64   | 2,59   | 2,54   | 2,48   |
| 16               | 4,49   | 3,63   | 3,24   | 3,01   | 2,85   | 2,74   | 2,66   | 2,59   | 2,54   | 2,49   | 2,42   |
| 17               | 4,45   | 3,59   | 3,20   | 2,96   | 2,81   | 2,70   | 2,61   | 2,55   | 2,49   | 2,45   | 2,38   |
| 18               | 4,41   | 3,55   | 3,16   | 2,93   | 2,77   | 2,66   | 2,58   | 2,51   | 2,46   | 2,41   | 2,34   |
| 19               | 4,38   | 3,52   | 3,13   | 2,90   | 2,74   | 2,63   | 2,54   | 2,48   | 2,42   | 2,38   | 2,31   |
| 20               | 4,35   | 3,49   | 3,10   | 2,87   | 2,71   | 2,60   | 2,51   | 2,45   | 2,39   | 2,35   | 2,28   |
| 21               | 4,32   | 3,47   | 3,07   | 2,84   | 2,68   | 2,57   | 2,49   | 2,42   | 2,37   | 2,32   | 2,25   |
| 22               | 4,30   | 3,44   | 3,05   | 2,82   | 2,66   | 2,55   | 2,46   | 2,40   | 2,34   | 2,30   | 2,23   |
| 23               | 4,28   | 3,42   | 3,03   | 2,80   | 2,64   | 2,53   | 2,44   | 2,37   | 2,32   | 2,27   | 2,20   |
| 24               | 4,26   | 3,40   | 3,01   | 2,78   | 2,62   | 2,51   | 2,42   | 2,36   | 2,30   | 2,25   | 2,18   |
| 25               | 4,24   | 3,39   | 2,99   | 2,76   | 2,60   | 2,49   | 2,40   | 2,34   | 2,28   | 2,24   | 2,16   |
| 30               | 4,17   | 3,32   | 2,92   | 2,69   | 2,53   | 2,42   | 2,33   | 2,27   | 2,21   | 2,16   | 2,09   |
| 40               | 4,08   | 3,23   | 2,84   | 2,61   | 2,45   | 2,34   | 2,25   | 2,18   | 2,12   | 2,08   | 2,00   |
| 50               | 4,03   | 3,18   | 2,79   | 2,56   | 2,40   | 2,29   | 2,20   | 2,13   | 2,07   | 2,03   | 1,95   |
| 60               | 4,00   | 3,15   | 2,76   | 2,53   | 2,37   | 2,25   | 2,17   | 2,10   | 2,04   | 1,99   | 1,92   |
| 80               | 3,96   | 3,11   | 2,72   | 2,49   | 2,33   | 2,21   | 2,13   | 2,06   | 2,00   | 1,95   | 1,88   |
| 100              | 3,94   | 3,09   | 2,70   | 2,46   | 2,31   | 2,19   | 2,10   | 2,03   | 1,97   | 1,93   | 1,85   |
| 120              | 3,92   | 3,07   | 2,68   | 2,45   | 2,29   | 2,18   | 2,09   | 2,02   | 1,96   | 1,91   | 1,83   |
| $\infty$         | 3,84   | 3,00   | 2,60   | 2,37   | 2,21   | 2,10   | 2,01   | 1,94   | 1,88   | 1,83   | 1,75   |