ANNEE UNIVERSITAIRE : 2019-2020
ANNEE D'ETUDES : L1 Eco-Gestion
SEMESTRE : 1
MATIERE : Calcul Economique 1
ENSEIGNANT : F. Karamé
Travail à la maison/Tutorat

EXERCICE 1 : L'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ -x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

est :

A. $(1, 1, 1)$ B. $(0, 1, -1)$ C. $(0, 1, 2)$.

EXERCICE 2 : L'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

est :

A. $(1, 1, 1)$ B. vide C. $(x, -1, 4 - x)$.

EXERCICE 3 : Soient P, Q et R trois propositions, et $\bar{P}$ la proposition contraire de P. Montrer, à l'aide d'un tableau de vérité, que :

1. $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
2. $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
3. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
4. $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
5. $(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$
6. $(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$
7. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
8. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
9. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}$
10. $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$
11. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$.
12. $(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \vee \bar{Q})$.
13. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

EXERCICE 4 : Montrer par récurrence :

1. $\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)i} = 1 - \frac{1}{n}$.

2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
3. $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
4. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
5. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

EXERCICE 5 : Soient quatre ensemble A, B, C et D. Déterminer :

1. $\mathbf{card}(A \cup B \cup C)$
2. $\mathbf{card}(A \cup B \cup C \cup D)$

EXERCICE 6 : Les racines du polynôme $x^2 - 16x + 80 = 0$ sont

A. $(8-4i, 8+4i)$ B. $(4, 12)$ C. $(8-5i, 8+4i)$.

EXERCICE 7 : Trouvez les racines du polynôme suivant :

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$$

EXERCICE 8 : Soient les fonctions d'offre et de demande :

$$D(p) : q = a - p$$
$$S(p) : q = b + 2p$$

où a et b sont des paramètres réels positifs.

1. Interpréter les paramètres a et b.
2. Représenter graphiquement ces fonctions.
3. Déterminer sous quelle condition un prix d'équilibre $p^\star$ existe. Déterminer ce prix.

EXERCICE 9 : Sur un marché, les quantités offerte et demandée sont déterminées comme une fonction du prix par :

$$D(p) : q = 6 - p$$
$$S(p) : q = p^2$$

1. Montrer qu'il existe un unique prix d'équilibre $p^\star > 0$.
2. Donner une représentation graphique des fonctions de demande et d'offre, et de l'équilibre.

EXERCICE 10 : Sur un marché, l'offre et la demande sont caractérisées par les équations suivantes :

$$D(p) : q = -4p + 1$$
$$S(p) : q = p^2 - 6p - 2$$

Calculer le prix d'équilibre $p^\star$ et les quantités échangées à l'équilibre, $q^\star$.

EXERCICE 11 : Soit un ménage disposant d'un revenu de 100. On suppose qu'il ne peut acheter que deux biens en quantité q_1 et q_2 dont les prix unitaires sont respectivement $p_1 = 1$ et $p_2 = \frac{1}{2}$.

1. Déterminer l'ensemble des couples de quantités (q_1, q_2) que le ménage peut consommer.
2. Comment cet ensemble est-il modifié si le ménage décide de consommer la totalité de son revenu ?
3. Représenter graphiquement ces deux cas.

   On suppose à présent la fonction de satisfaction suivante $u(q_1, q_2) = q_1^{1/2} q_2$.

4. Exprimer q_2 en fonction du niveau d'utilité $\bar{u}$ donné et de q_1. Représenter graphiquement la courbe d'indifférence de niveau $\bar{u}$ avec la contrainte budgétaire.
5. En précisant votre raisonnement, caractériser graphiquement les demandes optimales de biens 1 et 2 du ménage et les calculer.

EXERCICE 12 : Soit un ménage disposant d'un revenu de 100. On suppose qu'il ne peut acheter que deux biens en quantité q_1 et q_2 dont les prix unitaires sont $p_1 = p_2 = 1$.

1. Déterminer l'ensemble des couples de quantités (q_1, q_2) que le ménage peut consommer.
2. Comment cet ensemble est-il modifié si le ménage décide de consommer la totalité de son revenu ?
3. Représenter graphiquement ces deux cas dans le plan $(0, q_1, q_2)$.

   On suppose à présent la fonction d'utilité du ménage : $u(q_1, q_2) = 10q_1 + q_2$.
4. Exprimer q_2 en fonction d'un niveau d'utilité $\bar{u}$ supposé donné et de q_1. Représenter graphiquement les courbes d'indifférence pour différents niveaux $\bar{u}$ que vous pourrez préciser.
5. Caractériser par un raisonnement graphique les demandes optimales de biens 1 et 2 du ménage et les calculer.

EXERCICE 13 : Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\lim_{x\to 1} x^2 - 3x + 7$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-8x^2+19x-12}{x^2-3x+2}$
4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-1}$

EXERCICE 14 : Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 2x + 4 \end{aligned}$$

La fonction f est :

A. continue sur $[-1, 2]$ et dérivable sur $]-1, 2[$
B. continue et dérivable sur $]-1, 2[$
C. continue et dérivable sur $[-1, 2]$.

EXERCICE 15 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle :

A. continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
B. continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$
C. continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 16 : La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \ln(x^2 - 1)^3$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Sa fonction dérivée f' est définie par :

A. $\frac{2x}{x^2-1}$ B. $\frac{6x}{x^2-1}$ C. $\frac{3x}{x^2-1}$.

EXERCICE 17 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

A. f est décroissante sur $[-1/e, 1/e]$
B. f est croissante sur $[-1/e, 0]$ et décroissante sur $[0, 1/e]$
C. f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

EXERCICE 18 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5^{-x}$ admet pour dérivée :

A. -5^{-x} B. -5×-5^{-x} C. $-\ln 5 \times 5^{-x}$.

EXERCICE 19 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Etudier sa continuité et sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x} & \forall x \in]-\infty, -1/2] \\ f(x) = \frac{4}{e^2} & \forall x \in]-1/2, 1] \\ f(x) = \frac{4}{e^2} + \ln x & \forall x \in]1, +\infty] \end{array}$$

EXERCICE 20 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & \forall x \in]-1, 1[\\ 0 & \forall x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\end{cases}$$

EXERCICE 21 : Dresser le tableau de variation de la fonction f :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

EXERCICE 22 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Etudier son sens de variation. Définir que c'est une bijection et calculer sa fonction réciproque.

EXERCICE 23 : Déterminer les solutions de l'équation suivante :

1. $x^2 - 4x\sqrt{2} + 6 = 0$.
2. $x^2 + x + 1 = 0$.

EXERCICE 24 : Soit la fonction suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Résoudre $f(x) = 0$.

EXERCICE 25 : Soit la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 2$ définie pour toutes valeurs de x dans $\mathbb{R}$. Identifier $x^\star$ qui minimise f puis calculer $f(x^\star)$.

EXERCICE 26 : Calculer $(x+2)^5$ directement puis avec le binôme de Newton.

EXERCICE 27 : Retrouver la dérivée de $f(x) = \sqrt{x}$ en utilisant la définition de la fonction dérivée.

EXERCICE 28 : Retrouver que "la dérivée d'une somme de fonctions est la somme des dérivées des fonctions" en utilisant la définition de la fonction dérivée.

EXERCICE 29 : Supposons que la demande d'un bien soit une fonction du revenu : $c(R) = 3\sqrt{R}$. Calculer l'élasticité revenu : $\epsilon_R = \frac{c'(R)}{\frac{c(R)}{R}}$.

EXERCICE 30 : Déterminer les ensembles de définition et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x - 2$
2. $f(x) = 17x^2 - \sqrt{x}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
4. $f(x) = \frac{8}{x} - \frac{7}{x^3}$
5. $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$
6. $f(x) = \frac{x^2-7}{x-3}$
7. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2+2}}$.

EXERCICE 31 : Soit U la fonction d'utilité d'un agent. On définit l'aversion absolue pour le risque par : $A_U(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$ et l'aversion relative comme : $R_U(x) = -x\frac{U''(x)}{U'(x)}$ avec x le niveau de richesse de l'agent, U' et U'' respectivement les dérivées première et seconde de la fonction U si elles existent. Calculer les aversions absolues et relatives pour le risque pour les fonctions suivantes :

1. $U(x) = ax + b$
2. $U(x) = \ln(x)$
3. $U(x) = \frac{1}{1-r}x^{1-r}$
4. $U(x) = -e^{-ax}$

EXERCICE 32 : Un agent économique cherche à maximiser son utilité en consommant un bien. Sa fonction d'utilité est $U(x) = \ln(x) - e^{x-1}$ avec x la quantité consommée. Pour quelle quantité consommée $x^\star$ l'agent maximise-t-il son utilité ?

EXERCICE 33 : Une firme sur un marché concurrentiel se voit offrir un prix unitaire $p = 100$ pour son produit. Son coût de production est fonction des quantités produites q : $C(q) = 60q + 2q^2$. Calculer le profit de la firme. Quelle quantité $q^\star$ lui permettra-t-elle de maximiser son profit ?

EXERCICE 34 : A l'aide de la formule de Taylor-Young, calculer un développement limité de :

1. $f(x) = \sqrt{1+x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. $g(x) = \ln(1+x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.
3. $h(x) = \sqrt{1+x+x^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
4. $i(x) = \ln(2+2x+x^2)$ à l'ordre 2 au voisinage de 2.

EXERCICE 35 : Pour la suite géométrique u de raison $\sqrt{2}$ et $u_2 = 5$, le terme u_{10} est égal à :

A. $80\sqrt{2}$ B. 160 C. 80.

EXERCICE 36 : La suite u est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2^n\, u_n$. u_n est égal à :

A. 2^{n^2} B. $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ C. $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

EXERCICE 37 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + (0.1) + \cdots + (0.1)^n$. La suite u_n converge vers :

A. $10/9$ B. $9/10$ C. $11/10$.

EXERCICE 38 : La suite u est géométrique, de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$. La suite $v = \ln u$ est :

A. géométrique de raison e^q B. arithmétique de raison q C. arithmétique de raison $\ln q$.

EXERCICE 39 : Soit la suite u définie sur $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ u_0 &= 1, u_1 = 2 \end{aligned}$$

1. Soit la suite v de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que v est une suite géométrique. Calculer v_n en fonction de n.
2. En déduire u_n en fonction de n. La suite u est-elle convergente ?
3. Déterminer le rang p à partir duquel :

$$\left| u_n - \frac{7}{3} \right| \leq 10^{-6}$$

EXERCICE 40 : Un agent place un montant de 2000 euros au taux de 5% l'an. De plus, il ajoute 500 euros tous les ans.

1. Ecrire l'équation de récurrence correspondante.
2. L'écrire sous forme générale.
3. Quelle est la condition initiale ?
4. Quel est le montant à l'issue de 10 ans ?
5. Au bout de combien de temps le capital double-t-il ?

EXERCICE 41 : Sur un marché la demande pour un bien à la date t est linéaire par rapport au prix du bien :

$$D(p_t) : \; q_t = a - b\, p_t$$

où a et b sont deux paramètres réels strictement positifs. Sur le même marché, la quantité offerte à la date t dépend du prix à la date $t-1$:

$$S(p_{t-1}) : \; q_t = c + d\, p_{t-1}$$

où c et d sont deux paramètres réels positifs. Les offreurs utilisent le prix de la date précédente pour anticiper le prix aujourd'hui : on dit qu'ils ont des anticipations naïves.

1. Montrer que la quantité offerte est égale à la quantité demandée si et seulement si le prix à la date t est donné par :

$$p_t = \frac{a-c}{b} - \frac{d}{b}\, p_{t-1}$$

2. Calculer le point fixe $p^\star$ (ou état stationnaire) de cette équation de récurrence pour le prix. Quelle hypothèse faut-il poser sur les paramètres pour que ce prix ait un sens ?
3. Montrer que $p^\star$ est le prix d'équilibre sur ce marché. Calculer la quantité échangée à l'équilibre.
4. Calculer le prix à la t.
5. Donner la condition sous laquelle le prix converge vers $p^\star$. Commenter. La convergence est-elle monotone ?